Suites numériques : approfondissement

Somme des premiers carrés entiers

Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers carrés est :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration

Posons $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$ et $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

On sait que pour tout entier naturel k : $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ que l'on peut aussi écrire $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

Pour $k = 1$, cela donne : $2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$
Pour $k = 2$, cela donne : $3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$
Pour $k = 3$, cela donne : $4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$
...
Pour $k = n$ cela donne : $(n+1)^3 - 1^3 = 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$

Si on additionne membre à membre chacune de ces égalités, il nous reste :

$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \times (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3 \times (1 + 2 + ... + n) + n$

Ce qui est équivalent à : $(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n$

Ou encore $3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3S_1 - n$. En replaçant S_1 par son expression on obtient, $3S_2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$.

Une fois tout développé et réduit au même dénominateur on trouve $3S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$ soit $3S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$.

Ainsi : $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice d'applications

1. Déterminer $1 + 4 + 9 + 16 + ... + 169$.
2. Déterminer $100 + 121 + 144 + ... + 484$.

Correction

1. On pose $n = 13$ et on applique la formule de la somme des n premiers carrés : $S = \frac{13 \times 14 \times 27}{6} = 819$.
2. On calcule la somme $S = 1 + 2 + 3 + ... + 484$ puis on enlève la somme $S' = 1 + 2 + 3 + ... + 81$.
   $S = \frac{22 \times 23 \times 45}{6} = 3795$ et $S' = \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 285$. Ainsi : $100 + 121 + 144 + ...484 = 3795 - 285 = 3510$.