Suites numériques : approfondissement

Remboursement d'un emprunt par annuités constantes

Jean-Kevin souhaite emprunter une somme d'argent S à sa banque. Il s'engage à rembourser cette somme, avec intérêt. Pour cela, il va verser chaque année, pendant n années, une certaine somme d'argent notée a que l'on appelle **annuité**.

L'annuité a remboursée l'année n est constitué comme suit :

- L'intérêt I_n produit par le capital restant dû.
- L'amortissement A_n correspondant à la part de capital remboursée.

Une fois le versement de l'annuité effectué, la dette est diminuée du montant de l'amortissement.

Par exemple : Si Jean-Kevin emprunte 2 500€ à un taux de 4%, une annuité de 300€ se compose de la façon suivante :

- intérêt : $2\ 500 \times 0,04 = 100$
- amortissement : $300 - 100 = 200$

Après le versement de cette annuité, il restera 2 300€ à rembourser $(2\ 500 - 200)$.

Comprendre avec un exemple

Jean-Kevin souhaite établir le tableau d'amortissement de son emprunt de 2 500 € sur 10 ans au taux annuel de 4%. Le remboursement se fait à annuités constantes selon le principe expliqué dans l'encadré ci-dessus. L'objectif est de trouver le montant de l'annuité de façon à ce que le prêt soit totalement remboursé au bout de 10 ans. Il commence en essayant avec une annuité de 300€ Voici un extrait de son tableur :

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
1	**Capital emprunté**	2 500€				
2	**Taux d'intérêt**	0,04				
3	**Annuité**	300€				
4						
5	**Année**	**Dette début d'année**	**Intérêt**	**Annuité**	**Dette fin d'année**	**Amortissement**
6	1	2 500	100	300	2 300	200
7	2					
8	3					
9	4					
10	5					
11	6					
12	7					
13	8					
14	9					
15	10					

1. Recopier cette fiche sur un logiciel tableur.

2. Donner les formules à rentrer dans les cellules B6, C6, D6, E6 et F6 pour ensuite pouvoir les étirer vers le bas.

   B6 = ...

   C6 = ...

   D6 = ...

   E6 = ...

   F6 = ...

3. Une fois ces formules étirées, quelle est la somme qu'il reste à rembourser à Jean-Kevin après 10 ans pour une annuité de 300€ ?

   ....

4. En faisant varier l'annuité, donner une approximation de celle-ci pour que la dette de Jean-Kevin au bout de 10 ans soit de 0€.

   ....

5. A l'aide du tableur, effectuer les divisions d'un amortissement d'une année par celui de l'année précédente. Que remarque-t-on ? Que peut-on en déduire concernant la suite des amortissements ?

   ....

   ....

Étude théorique

Durant toute cette partie, on utilisera les notations suivantes avec p entier naturel strictement positif.

I_p : intérêt de l'année p
A_p : annuité de l'année p
$a = I_p - A_p$
t : taux d'intérêt
D_p : capital restant dû à l'année p
$D_p = D_{p-1} - A_p$
$I_p = t \times D_{p-1}$

1. En utilisant le fait que les annuités sont les mêmes chaque année et que donc $A_{p+1} + tD_p = A_p + tD_{p-1}$, montrer que $A_{p+1} = (1+t)A_p$.

   ....

   ....

   ....

2. Quelle est la nature de la suite (A_n) ?

   ....

3. D'après la définition des amortissements, on a $S = \sum_{p=1}^{n} A_p$. Calculer S.

   ....

   ....

   ....

4. En déduire que $A_1 = S \times \dfrac{t}{(1+t)^n - 1}$.

   ....

   ....

5. En partant de $a = I_1 + A_1 = tS + A_1$, montrer que $a = tS \times \dfrac{(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}$.

   ....

   ....

   ....

6. En déduire que $a = tS \times \dfrac{1}{1 - (1+t)^{-n}}$.

   ....

   ....

   ....

7. Quelle est la valeur exacte de l'annuité que Jean-Kevin doit saisir pour répondre à son problème ?

   ....

   ....