Exercices sur les suites arithmétique et géométrique

> Vérifier qu'une suite est arithmétique

Exercice n°1 Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou non.

a. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$

b. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 50n + 1$

c. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+5)^2 - n^2$

d. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$

Exercice n°2 Dire si les suites suivantes sont arithmétiques ou non.

a. (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_{n+1} = u_n + n - 1$

b. (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_{n+1} = u_n + 4$

Exercice n°3

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

On suppose que : $\forall\ n \in \mathbb{N} u_n \neq 1$.

Montrer que (v_n) est arithmétique.

> Etude des suites arithmétiques

Exercice n°4

La suite (u_n) est arithmétique de raison $-0,4$ et telle que $u_{27} = -8,7$.

1. Déterminer le terme initial u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Donner le sens de variation de cette suite.
4. Quelle est la limite de cette suite ?

Exercice n°5

La suite (u_n) est arithmétique telle que $u_{1\ 000} = 2\ 026$ et $u_{2\ 000} = 2\ 036$.

1. Déterminer la raison de cette suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Donner le sens de variation de cette suite.
4. Quelle est la limite de cette suite ?

Exercice n°6 Pour chacune des suites suivantes, dire si elle est arithmétique. Si oui, préciser son premier terme, sa raison, son sens de variation et sa limite.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 6$.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 2n$.
3. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} - u_n = -3$.
4. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

Exercice n°7

Le programme ci-dessous permet d'obtenir n'importe quel terme u_n d'une suite arithmétique. L'utilisateur donnera alors le premier terme de la suite, sa raison et le rang n du terme qu'il souhaite calculer.

```
def arithmetique(?):
        U=?
    return(?)
```

1. Compléter ce programme.
2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 6,2$ et de raison $-0,87$. A l'aide du précédent programme, déterminer u_{500}.

Exercice n°8

On considère la suite (u_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et telle que $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10} = \dfrac{143}{6}$.

1. Calculer le terme initial u_0 de cette suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer les variations de (u_n) et sa limite.

Exercice n°9

On considère la suite (u_n) est arithmétique de terme initial $u_1 = -450$ et telle que $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{25} = 0$.

1. Déterminer la raison de cette suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer les variations de (u_n) et sa limite.

> Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Exercice n°10

Déterminer les sommes suivantes :

a. $1 + 2 + 3 + ... + 39$ **b.** $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 24$ **c.** $100 + 101 + 102 + ... + 140$

Exercice n°11

Déterminer les sommes suivantes :

1. La somme des trente premiers entiers naturels non nuls
2. La somme $2 + 3 + 4 + ... + n$
3. La somme des entiers naturels compris strictement entre 500 et 1 000.
4. La somme des entiers impairs compris entre 500 et 1 000.

> Vérifier qu'une suite est géométrique

Exercice n°12 Dire si les suites suivantes sont géométriques ou non.

a. $u_n = 25 \times (\sqrt{3})^n$ **b.** $v_n = (n+1)^n$ **c.** $w_0 = -2$ et $w_{n+1} = -4 \times w_n$

Exercice n°13 Dire si les suites suivantes sont géométriques ou non.

a. $u_n = 3^{2n}$ **b.** $u_n = -5 \times (-2)^{n+1}$ **c.** $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_n = 3 \times u_{n+1}$

Exercice n°14 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^{n+1} \times 6^{n+2}$.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
2. Calculer $\dfrac{u_2}{u_1}$ et $\dfrac{u_1}{u_0}$.
3. Montrer que (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.

> Etude des suites géométriques

Exercice n°15 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $-0,5$ et telle que $u_8 = \dfrac{125}{32}$.

1. Calculer le terme initial u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer les variations de cette suite.
4. Quelle semble être la limite de cette suite quand n tend vers $+\infty$?

Exercice n°16 Soit (v_n) la suite géométrique de raison $1,5$ et telle que $v_5 = \dfrac{-81}{32}$.

1. Calculer le terme initial v_1.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Déterminer les variations de cette suite.

Exercice n°17

1. Ecrire un programme Python qui permet d'obtenir n'importe quel terme v_n d'une suite géométrique (v_n) dès lors que l'utilisateur donnera v_0, la raison q de la suite et le rang n du terme qu'il veut calculer.
2. Tester ce programme et vérifier qu'avec $v_0 = -1$, $q = -2$ et $n = 9$ le programme retourne la valeur 512.

Exercice n°18 (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et telle que $u_0 + u_1 + ... + u_{10} = 88\ 573$.

1. Déterminer le terme initial v_0 de cette suite.
2. Exprimer v_n en fonction de n.

> Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Exercice n°19 Déterminer les sommes suivantes :

a. $1+2+4+8+...+2^9$ **b.** $1+3+9+27+...+3^{20}$ **c.** $1-2+4-8+...+1\ 024$

Exercice n°20

1. Déterminer $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{10}}$.
2. Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 3 et de raison 1,05.
3. Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $-0,8$.

> Modéliser à l'aide des suite arithmétiques ou géométriques

Exercice n°21

Un téléphérique progresse à vitesse constante : à chaque seconde, son altitude augmente de 0,75 m.
La gare de départ à une altitude de 1 450 m. On appelle a_n l'altitude de la cabine après n secondes de trajet, en mètres.

1. Déterminer les valeurs de a_0, a_1 et a_2.
2. Montrer que la suite (a_n) est arithmétique.
3. La durée du trajet est de 15 minutes. Quelle est l'altitude de la gare d'arrivée ?

Exercice n°22

Au pays de Jean-Kevin, les nénuphars poussent en doublant leur surface chaque jour. Un matin, un nénuphar éclot au centre d'un étang circulaire de rayon 100 m ; le nénuphar mesure alors 1 cm de rayon.

1. Exprimer la surface S_n du nénuphar au bout de n jours en fonction de l'entier n, en m^2.
2. On souhaite déterminer au bout de combien de jours le nénuphar aura recouvert la moitié de l'étang. Compléter le programme Python ci-dessous qui permet de résoudre ce problème.

```
import math
def nenuphar( ):
        n=?
        u=math.pi
        while ?
            n=?
            u=?
    return(?)
```

3. Tester alors ce programme pour résoudre le problème.
4. Au bout de combien de temps le nénuphar aura-t-il recouvert la totalité de la surface de l'étang ?
5. Montrer que le rayon r_n du nénuphar (en m), après n jours, est le terme général d'une suite géométrique, dont on précisera la raison.

Exercice n°23

Jean-Kevin veut faire creuser un puit au fond de son jardin. Une réserve d'eau naturelle se situe à 12 mètres de profondeur. Il trouve le devis suivant pour réaliser le forage :

Forfait de prise en charge, visite sur le terrain : 40€ puis 150€ par mètre foré.

On note p_n le prix en € pour un forage de n mètres.

1. Calculer p_1.
2. Déterminer la nature de la suite (p_n) et en déduire l'expression de p_n en fonction de n.
3. Quel prix va payer Jean-Kevin s'il choisi cette entreprise ?

Exercice n°24

Jean-Kevin place 6 500€ sur un compte bloqué pour 15 ans. Ce compte rapporte 4% par an. On appelle c_n la somme sur ce compte au bout de n années.

1. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.
2. En déduire une expression de c_n en fonction de n.
3. Quel sera le capital de Jean-Kevin sur ce compte au bout de 5 ans ?
4. Sur les 10 premières années, combien Jean-Kevin aura-t-il gagner grâce aux intérêts de ce compte ?

Exercice n°25

Une culture de 4 500 bactéries A augmente chaque semaine de 2,5% par rapport à la semaine précédente. Une culture de 5 000 bactéries B augmente de 140 bactéries par semaine.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de bactéries A et v_n le nombre de bactéries B au bour de n semaines.

1. Calculer le nombre de bactéries A et B au bout de 4 semaines.
2. Calculer le nombre de bactéries A et B au bout de 10 semaines.
3. Quelles sont les natures des suite (u_n) et (v_n) ? En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.
4. Ecrire un programme qui permet de déterminer au bout de combien de semaines il y aura plus de bactéries A que de bactéries B.
5. Tester alors le programme pour connaître ce nombre de semaines.
6. Au bout de combien de semaines le nombre de bactéries A augmente-t-il de 25% par rapport au nombre initial de bactéries de la culture A ?