Correction sur les variations de fonctions

> Etudier les variations d'une fonction

Exercice n°1

1. $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Exercice n°2

1. On pose $u(x) = x - 3$ et $v(x) = x - 1$. On a $u'(x) = v'(x) = 1$. Ainsi : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{2}{(x-1)^2}$.
2. Cette dérivée est strictement positive pour tout réel x différent de 1. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Exercice n°3

1. On pose $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a ainsi $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Ainsi, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$

2. Sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, $2\sqrt{x} > 0$. On étudie donc le signe du numérateur de $f'(x)$:

   $5x^2 - 1 = (\sqrt{5}x - 1)(\sqrt{5}x + 1)$. Cette expression s'annule en $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Ainsi :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Exercice n°4

1. La racine carrée est une fonction définie pour tout réel positif. Il faut donc que $3x - 4 \geqslant 0$ autrement dit que $x \geqslant \dfrac{4}{3}$.
2. Le coefficient directeur de $3x - 4$ étant positif, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 3x - 4$ est strictement croissante sur son domaine de définition.
3. Ainsi, la fonction f est croissante sur son ensemble de définition par composition.
4. Pour que la fonction g soit définie, il faut que $x^2 - 2x + 3 \geqslant 0$.
   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 < 0$. Ainsi, ce trinôme est positif sur $\mathbb{R}$ donc g est définie pour tout réel x.
   Etude des variations du polynôme : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2 \times 1} = 1$. Le polynôme est décroissant sur $]-\infty\,;1[$ puis croissant sur $]1\,;+\infty[$.
   Il en est donc de même pour les variations de la fonction g.

Exercice n°5

1. $h(0,5) = -4,9 \times 0,5^2 + 10 \times 0,5 = 3,775$. Au bout de 0,5 seconde, le projectile se trouve à 3,775 m de haut.
2. $h'(t) = -4,9 \times 2 \times t + 10 = -9,8t + 10$. On obtient ainsi le tableau de variations de la fonction h :

t	0		$\dfrac{10}{9,8}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

   Le point le plus haut est atteint en $\dfrac{10}{9,8}$. A ce moment là, $h'(t) = 0$.
3. On doit résoudre $h(t) = 0$.

   $-4,9t^2 + 10t = 0$

   $\Leftrightarrow t(-4,9t + 10) = 0$

   $\Leftrightarrow t = 0$ ou $-4,9t + 10 = 0$

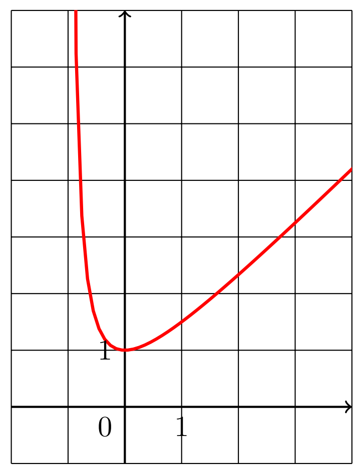
   $\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \dfrac{10}{4,9} \approx 2,04$

   Le projectile retombe au sol au bout de 2,04 secondes environ.

> Extremum d'une fonction

Exercice n°6

1. Il semble que f admette un minimum sur $]-1\,;+\infty[$. Ce minimum semble être atteint vers 0 et semble être égal à 1.



2. On pose $u(x)=x^2+x+1$ et $v(x)=x+1$. On a alors $u'(x)=2x+1$ et $v'(x)=1$.

   Ainsi : $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\dfrac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

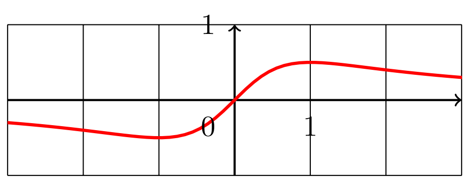
   Cette dérivée s'annule en 0 et -2. On ne garde que 0 qui, lui, appartient à l'ensemble de définition de f. On a alors :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   Le minimum de f est bien atteint en 0 et $f(0)=1$ qui est la valeur de ce minimum.

Exercice n°7

1. Quand x est dans l'intervalle $]-3\,;3[$, il semble que $-0,5\geqslant f(x)\geqslant 3$.



2. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 1$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.

   Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)}$.

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\frac{3}{10}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{10}$

   Au minimum, $f(x)$ prend la valeur $-0,5$ et au maximum, $f(x)$ prend la valeur 0,5.

Exercice n°8

1. $\text{E} = (\text{R}+2)\text{I} \Leftrightarrow 10 = (\text{R}+2)\text{I} \Leftrightarrow \text{I} = \dfrac{10}{\text{R}+2}$

   Ainsi $\text{P} = \text{RI}^2 \Leftrightarrow \text{P} = \text{R} \times \left(\dfrac{10}{\text{R}+2}\right)^2 = \dfrac{100\text{R}}{(\text{R}+2)^2}$.

2. On pose $u(\text{R}) = 100\text{R}$ et $v(\text{R}) = (\text{R}+2)^2$. On a alors $u'(\text{R}) = 100$ et $v'(\text{R}) = 2\text{R}+4$. On a ainsi :

   $$f'(\text{R}) = \frac{u'(\text{R})v(\text{R}) - u(\text{R})v'(\text{R})}{v(\text{R})^2} = \frac{100(\text{R}+2)^2 - 100\text{R}(2\text{R}+4)}{(\text{R}+2)^2} = \frac{400 - 100\text{R}^2}{(\text{R}+2)^2} = \frac{(20-10\text{R})(20+10\text{R})}{(\text{R}+2)^2}.$$

x	0		2		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	12,5	↘	$\frac{625}{338} \approx 1{,}85$

3. La puissance est maximale pour $\text{R} = 2$ et cette puissance vaut 12,5 W.

Exercice n°9

1. Volume d'un pavé droit : Longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur.
   Ici, la hauteur vaut y cm et la longueur et la largeur sont égales à x dm. Puisque le volume est égal à 1 dm^3 on a $1 = y \times x \times x$ ou encore $y = \dfrac{1}{x^2}$.
2. Aire des deux bases carrées : x^2.
   Aire d'une face latérale, qui est un rectangle : $y \times x$. Puisque $y = \dfrac{1}{x^2}$ cela donne $\times \dfrac{1}{x}$ soit $\dfrac{1}{x}$.
   Les deux bases + les quatre faces latérales : $2 \times x^2 + 4 \times \dfrac{1}{x} = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$.

3. La dérivée de $2x^2$ est $4x$. La dérivée de $\dfrac{4}{x}$ est $-\dfrac{4}{x^2}$. Par somme :

$$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4x^3 - 4}{x^2}$$

Et $\dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} = \dfrac{4(x^3+x^2+x-x^2-x-1)}{x^2} = \dfrac{4x^3-4}{x^2} = S'(x)$

4. x étant un réel strictement positif, $x^2 > 0$ et $x^2 + x + 1 > 0$. Puis $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. On obtient ainsi le tableau de signe de $S'(x)$ suivant et donc le tableau de variations de S sur $]\,0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	6	$\nearrow$	

5. L'aire minimale de la boîte est atteinte quand $x = 1$ et la surface minimale est de 6 dm^2.

Exercice n°10

1. $\mathrm{M}\left(x\,;\,-\dfrac{2}{9}x^2+8\right)$ et $\mathrm{H}(x\,;\,0)$.

2. $\mathcal{A}_{\mathrm{AMH}} = \dfrac{\mathrm{AH} \times \mathrm{HM}}{2}$

$\mathrm{AH} = \sqrt{(x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{H}} - y_{\mathrm{A}})^2} = \sqrt{(x-(-6))^2 + (0-0)^2} = x + 6$

$\mathrm{HM} = \sqrt{(x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{H}})^2 + (y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{H}})^2} = -\dfrac{2}{9}x^2 + 8$

Donc $\mathcal{A}_{\mathrm{AMH}} = \dfrac{(x+6) \times \left(-\dfrac{2}{9}x^2+8\right)}{2} = \dfrac{-\dfrac{2}{9}x^3 + 8x - \dfrac{12}{9}x^2 + 48}{2} = -\dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{6}{9}x^2 + 24.$

3. $f'(x) = -\dfrac{1}{9} \times 3x^2 - \dfrac{2}{3} \times 2x + 4 = -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{4}{3}x + 4$

4. $\Delta = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times 4 = \dfrac{64}{9}$. $\Delta > 0$ donc $f'(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-\dfrac{-4}{3} - \sqrt{\dfrac{64}{9}}}{2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\dfrac{-4}{3} + \sqrt{\dfrac{64}{9}}}{2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)} = -6$$

On en déduit ainsi le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $[-6\,;\,6]$:

x	-6		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\dfrac{256}{9}$	↘	0

5. L'aire de AMH est maximale quand l'abscisse de M est 2 et cette aire maximale vaut environ 28,44.

Exercice n°11

Partie A

1. $U'(x) = 1 - \dfrac{900}{x^2} = \dfrac{x^2 - 900}{x^2} = \dfrac{(x-30)(x+30)}{x^2}$. Cette dérivée s'annule en 30 et en -30.

x	10		30		100
$U'(x)$		$-$	0	$+$	
U	90	↘	50	↗	99

2. Le coût de production unitaire est le plus bas quand l'entreprise fabrique 30 objets. Un objet lui coûte alors 50€.
$30 \times 100 - 30 \times 50 = 1\ 500$. Le bénéfice est alors de 1 500€.

Partie B

1. Puisque chaque objet est vendu 100€ :
$B(x) = 100x - x \times \left(x - 10 - \dfrac{900}{x}\right) = 100x - x^2 + 10x + 900 = -x^2 + 110x + 900$.

2. B est un polynôme du second degré :$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{110}{2 \times (-1)} = 55$. B est donc croissant sur $]-\infty\,;55\,[$ puis décroissant sur $]55\,;+\infty[$.
B atteint son maximum en $x = 55$ et ce maximum vaut $B(55) = 2\ 125$.

> Position relative de deux courbes, établir des inégalités

Exercice n°12

$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{4}x + 2 - \left(-\dfrac{1}{16}x^2 + \dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{5}{16}x^2 - \dfrac{5}{4}x + 2.$

Cette différence est un polynôme du second degré. On a le tableau de variations suivant sur $[0\,;4]$:

x	0		0,4		4
$f-g$	2	↘	1,95	↗	2

Pour $x \in [0\,;4]$, $f(x)-g(x) \in [1{,}95\,;2]$ ou encore $1,95 \geqslant d(x) \geqslant 2$. Jean-Kevin a donc tord.

Exercice n°13

1. Quand x varie entre -3 et 3, $f(x)$ semble varier entre $-0,5$ et 2,5.
2. On pose $u(x) = x^2 - 3x + 1$ et $v(x) = x^2 + 1$. On a alors $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = 2x$.

   Ainsi : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{(2x-3)(x^2+1) - (x^2-3x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	
f	1,9	↗	2,5	↘	$-$ 0,5	↗	0,1

3. Quand x varie entre -3 et 3, $f(x)$ varie bien entre $-0,5$ et 2,5.

Exercice n°14

1. $f'(x) = 9x^2 - 10x$.
2. $f'(-1) = 19$ et $f(-1) = -6$. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est donc $y = 19 \times (x - (-1)) + (-6)$ ou encore $y = 19x + 13$
3. $f(x) - g(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2 - (3x^3 - 4x + 1) = -5x^2 + 4x + 1$.
4. $\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) \times 1 = 36 > 0$: Le polynôme admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2\times 5} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2\times 5} = 0,2$$

x	$-\infty$		-1		0,2		$+\infty$
f		$-$	0	+	0	$-$	

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ quand x est dans l'intervalle $[-1\,;0{,}2]$.

Exercice n°15

1. Il semble que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ soient -1 et 1.
2. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
3. $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0$: le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$	

4. Il faut étudier le signe de $g(x) - (x+1)$. Nous avons le tableau de variations précédent pour nous aider.
   Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$, $\mathcal{C}_g$ est en dessous de la droite d'équation $y = x + 1$.
   Mais $f(1) = 0$ donc $g(x) - (x+1) = 0$ quand $x = 1$. (question 1)
   Ainsi, sur l'intervalle $\left]\frac{1}{3}\,;1\right[$ $\mathcal{C}_g$ est encore en dessous de la droite. Cela s'inverse sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.