Continuité des fonctions : approfondissement

Une équation fonctionnelle

On cherche à trouver l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice n°1

1. La fonction exponentielle est-elle solution de cette équation fonctionnelle ?
2. Soit f une fonction solution de l'équation.
   Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, $f(xn) = nf(x)$.
3. Montrer que pour tout entier relatif n et pour tout réel x, $f(nx) = nf(x)$.
4. Montrer que pour tout nombre rationnel r et pour tout x réel, $f(rx) = rf(x)$.
5. En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = ax$. En déduire l'ensemble des solution de l'équation fonctionnelle.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Prenons $x = 0$ et $y = 1$.
   - $e^{0+1} = e^0 = 1$
   - $e^0 + e^1 = 1 + e \neq 1$

   La fonction exponentielle ne vérifie donc pas l'équation fonctionnelle.

2. Montrons ce résultat par récurrence.

   Initialisation

   Pour $n = 1$: $f(1 \times x) = f(x)$ et $1 \times f(x) = f(x)$. C'est donc vrai pour $n = 1$.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 1$, $f(nx) = nf(x)$.
   $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$. La proposition est donc vraie pour $n + 1$.

   Conclusion

   La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour cet entier. Elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0)$. Mais puisque $f(nx) = nf(x)$ alors $f(0) = 0$.

   Si n est un entier négatif alors $-n$ est positif et $-nx + nx = 0$. Ainsi :

   $0 = f(0) = f(-nx + nx) = f(-nx) + f(nx) = -nf(x) + f(nx)$. Donc $f(nx) = nf(x)$.

4. Puisque r est un rationnel, il existe p et $q \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$.

   $f(rx) = f\left(\dfrac{p}{q}x\right)$. Si $r = \dfrac{p}{q}$ alors $p = q \times \dfrac{p}{q}$.

   D'une part : $f\left(q \times \dfrac{p}{q}x\right) = qf\left(\dfrac{p}{q}x\right) = qf(rx)$. D'autre part, $f\left(q \times \dfrac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x)$. On arrive donc bien à $f(rx) = rf(x)$.

5. Puisque f est continue, on peut trouver une suite (x_n) de rationnels telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

   Puis $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n f(1) = xf(1)$.
   Posons $a = f(1)$. On vient ainsi de montre que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = ax$ qui est une fonction linéaire.

   Finalement, si f est une solution de l'équation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ alors c'est une fonction linéaire.

   Réciproquement : soit f une fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$.

   $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.