Étudier les variations d'une fonction

1 Variations d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.

Exemples On souhaite étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $5x^3 - x^2 - 6x - 1$ sur son ensemble de définition.

(1) On détermine $f'(x)$: $f'(x) = 3 \times 5x^2 - 2 \times x - 6 = 15x^2 - 2x - 6$.

(2) On étudie maintenant le signe de $f(x)$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 15 \times (-6) = 364$.
$\Delta > 0$ donc $f'(x)$ admet deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{364}}{2 \times 15} = \frac{1 - \sqrt{91}}{15} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{364}}{2 \times 15} = \frac{1 + \sqrt{91}}{15}$$

(3) On peut maintenant utiliser notre théorème et donner les variations de f sur son ensemble de définition :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{91}}{15}$		$\frac{1+\sqrt{91}}{15}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On souhaite étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$ sur son ensemble de définition.

(1) Pour trouver $f'(x)$, on utilise la formule de dérivation d'un quotient. On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2 + 1$. On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2 \times (x^2+1) - (2x-1) \times 2x}{(x^2+1)} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2}$$

(2) On étudie maintenant le signe de $f'(x)$.
Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend donc de son numérateur.

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 20$.
$\Delta > 0$ donc $f'(x)$ admet deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{20}}{2\times(-2)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2\times(-2)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(3) On peut maintenant étudier les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

2 Extremum d'une fonction

Définitions (rappels)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I.

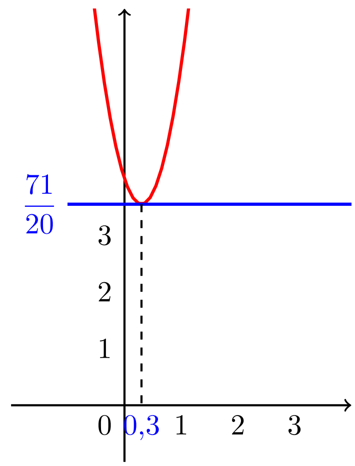
- On dit que f admet un **maximum** en a si pour tout réel x de I $f(a) \geqslant f(x)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si pour tout réel x de I $f(a) \leqslant f(x)$.
- On dit que f admet un **extremum** sur I si elle possède un maximum ou un minimum sur I.

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Si la dérivée f' s'annule et change de signe en un réel a de I alors f admet un extremum en $x = a$.

Exemple On souhaite savoir si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet un extremum sur son ensemble de définition.
$f'(x) = 10x - 3$. Or $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;0{,}3\,[$ puis positif sur $]\,0{,}3\,;+\infty\,[$.
On a donc le tableau de variations de f suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0,3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\dfrac{71}{20}$	$\nearrow$	



f admet donc un minium sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = 0,3$. La valeur de ce minimum est $f(0,3)$ autrement dit $\dfrac{71}{20}$.
La courbe représentative de la fonction f admet alors une tangente horizontale au point d'abscisse 0,3.

3 Position relatives entre deux courbes représentatives

Méthode

Pour étudier la position de deux courbes représentatives de deux fonctions f et g :

(1) On calcule la différence $f(x) - g(x)$.
(2) On étudie le signe du précédents résultats ou on exploite ses variations (calcul de la dérivée puis utilisation de la première partie de cette leçon)
(3) A partir du tableau de signes et/ou de variations, on en déduit la position de ces deux courbes représentatives.

Exemple Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$ et $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$.

(1) On pose h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2 - (3x^3 - 4x + 2) = -5x^2 + 4x + 1$.

(2) $\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) \times 1 = 36$. $\Delta > 0$ donc h admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times (-5)} = 1 \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times (-5)} = \frac{1}{5}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur $\left]\dfrac{1}{5} ; 1\right[$, $h(x) > 0$ autrement dit $f(x) - g(x) > 0$ ou encore $f(x) > g(x)$. La courbe représentative de f est donc au dessus de celle de g sur cet intervalle. Sur les intervalles $\left] -\infty ; \dfrac{1}{5}\right[$ et $]\, 1 ; +\infty\, [$, c'est le contraire.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 2x + 18$ et $g(x) = 5x^2 - 4x - 7$. On veut étudier la position relative de leur courbe représentative sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

(1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 25$.

(2) $h'(x) = 12x^2 - 10x + 2$. $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 12 \times 2 = 4$
$\Delta > 0$ donc h' admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{4}}{2 \times 12} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{4}}{2 \times 12} = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	25	$\nearrow$	$\frac{682}{21}$	$\searrow$	$\frac{101}{4}$	$\nearrow$	94

Quand x appartient à $[0\,;\,3]$, $h(x)$ appartient à $[25\,;\,95]$ d'après la ligne des variations de h.
Ainsi, $h(x) > 0$ sur cet intervalle ce qui signifie que $f(x) - g(x) > 0$ ou encore $f(x) > g(x) > 0$ sur $[0\,;\,3]$.
La courbe représentative de f est donc au dessus de celle de g sur $[0\,;\,3]$.

4 Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - 4x + 1$. On souhaite donner un encadrement, le plus précis possibles, des valeurs de $f(x)$ quand x varie entre -3 et 4 et quand x varie entre 4 et 6.

(1) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x - 4$.

(2) On va étudier le signe de $f'(x)$ pour ensuite déterminer les variations de f.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times (-4) = 16$. $\Delta > 0$ donc f' admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times \frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} \qquad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times \frac{3}{4}} = 4$$

x	-3		$-\frac{4}{3}$		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-2{,}75$	$\nearrow$	$\frac{107}{27}$	$\searrow$	-15	$\nearrow$	-5

Ainsi, quand x varie entre -3 et 6, $f(x)$ varie entre -15 et $\frac{107}{27}$. Mais quand x varie entre 4 et 6, $f(x)$ varie entre -5 et -15.