Variables aléatoires réelles

1 Variable aléatoire réelle

Définition

On se place dans le cas d'une expérience aléatoire et on note son univers Ω.
On appelle **variable aléatoire** une fonction définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$. La plupart du temps, on note cette fonctionn X.

Exemple

Dans une urne, il y a 3 boules rouges et une boule verte. On pioche au hasard une boule de cette urne. Si elle est verte, un gagne 2€ sinon, on perd 1€.
On a donc $\Omega = \{\ \mathrm{R}_1\ ;\ \mathrm{R}_2\ ;\ \mathrm{R}_3\ ;\ \mathrm{V}_1\ \}$. On définie sur cet univers la variable aléatoire X qui vaut 2 si $X = \mathrm{V}_1$ ou -1 sinon.
On peut noter $X(\mathrm{V}_1) = 2$, $X(\mathrm{R}_1) = -1$, $X(\mathrm{R}_2) = 2$ et ainsi de suite.

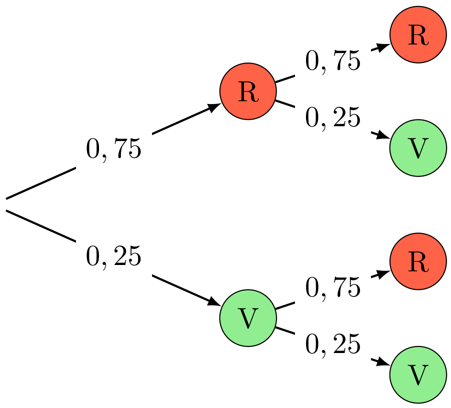
Définition : loi de probabilité

Soit n un entier naturel. Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs x_i pour $i \in [0\,;\,n]$.
On appelle **probabilité de $X = x_i$** la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.
On note alors $P(X = x_i)$.

La **loi de probabilité de X** est l'ensemble des $P(X = x_i)$.

Exemple

On joue deux fois de suite au jeu du précédent exemple en remettant la boule dans l'urne à l'issue du premier tirage. Il y a donc trois issues différentes possibles : soit on pioche deux boules rouges, soit deux boules vertes soit une boule de chaque.
On représente la situation par l'arbre pondéré suivant :



x_i	-2	1	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

On vient ainsi de définir la loi de probabilité X.

Remarque

Une fois la loi de probabilité définie, on vérifiera que la somme de tous les $P(X = x_i)$ est égale à 1.

2 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Remarque

Dans cette partie, on considèrera une variable aléatoire X dont on donne ci-dessous la loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(x = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Définition

On appelle **espérence** de la variable aléatoire X le nombre noté E ou $\overline{X}$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n$$

Exemple

On reprend l'exemple de la partie précédente : $E(X) = -2 \times \dfrac{9}{16} + 1 \times \dfrac{6}{16} + 2 \times \dfrac{1}{16} = -\dfrac{5}{8}$.

Remarque

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois.
Lorsqu'il s'agit d'un jeu, celui-ci est favorable au joueur si son espérance est un nombre positif et défavorable si son espérance est un nombre négatif.

Définition

Quand l'espérance d'une expérience aléatoire vaut 0 on dit qu'elle est **équitable**.

Définitions

- On appelle **variance** de la variable aléatoire X le nombre noté V défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$$

- On appelle **écart-type** de la variable aléatoire X le nombre noté σ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque

Plus l'écart-type d'une variable aléatoire X est grand, plus les valeurs prises par X sont éloignées de $E(X)$. C'est un indicateur de dispersion.

Exemple

On va déterminer l'écart-type de notre série de l'exemple précédent.

$V(X) = \frac{9}{16} \times \left(-2 - \left(\frac{5}{8}\right)\right)^2 + \frac{6}{16} \times \left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)\right)^2 + \frac{1}{16} \times \left(2 - \left(\frac{5}{8}\right)\right)^2 = \frac{259}{64}$.

Puis $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{259}{64}} = \frac{\sqrt{259}}{8} \approx 2$