Suites numériques : approfondissement

Suites adjacentes

Définition Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

(u_n) et (v_n) sont des **suites adjacentes** quand (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Exemple Les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

Exercice n°1 Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= f(v_n) \end{cases}$$

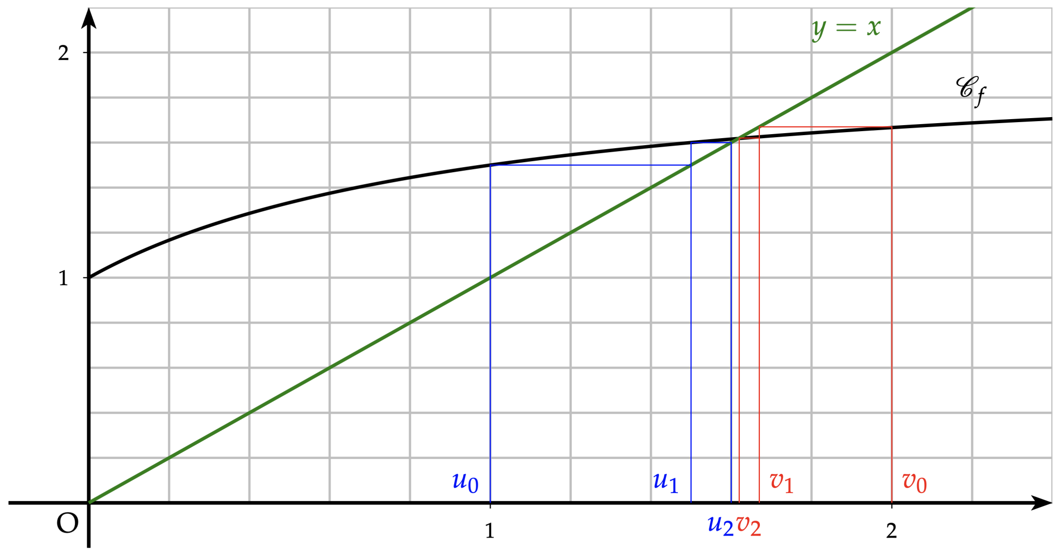
   Représenter sur un même graphique la courbe représentative de la fonction f sur son ensemble de définition puis construire les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. Quelle conjecture peut-on faire concernant les variations des deux suites et leur convergence ?
3. Montrer par un raisonnement par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées et que (u_n) est croissante ((v_n) est décroissante.
4. Calculer $v_{n+1} - u_{n+1}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n on a $|v_{n+1} - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{4}|v_n - u_n|$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n $|v_n - u_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
6. Montrer que les deux suites convergent vers un même réel φ et déterminer la valeur de ce réel. Pour cela, on s'aidera, entre autre, du théorème suivant :

   Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction continue. Soit (u_n) une suite définie par un u_0 et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers un réel l et si f est continue en l alors $l = f(l)$.
   C'est le **théorème du point fixe**.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. On obtient la représentation graphique suivante :



2. La suite (u_n) semble croissante et tendre vers un réel compris entre 1,5 et 2.
   La suite (v_n) semble décroissante et tendre vers un réel compris entre 1,5 et 2.

3. **Initialisation**

   $u_1 = f(u_0) = \dfrac{3}{2}$ donc $u_1 \geqslant u_0$.
   De même : $v_1 = f(v_0) = \dfrac{5}{3}$ donc $v_1 \leqslant v_0$.
   On a donc montré que pour $n = 1$, la proposition « (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et les deux suites sont bornées » est vraie.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier $n \geqslant 1$, la proposition soit vraie.
   On a donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0\,;\,2]$, on a $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$ qui correspond à $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.
   On montre de la même manière que $v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$.

   D'après la proposition : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Par continuité et par croissance de la fonction f, on a $1 \leqslant f(u_n) \leqslant 2$ ce qui correspond à $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   On montre de même que $1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$.

   La proposition est donc héréditaire.

   Conclusion

   La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour $n \geqslant 1$: la proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.

4. $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1}$$
$$= \frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$= \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$
Or $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow 2 \leqslant u_n+1 \leqslant 3$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$
De même : $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{v_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Par passage au produit : $\frac{1}{9} \leqslant \frac{1}{(v_n+1)(u_n+1)} \leqslant \frac{1}{4}$.
On a alors $\left|\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}\right| \leqslant \frac{|v_n-u_n|}{4}$.

5. Posons $w_n = |v_n - u_n|$. D'après la question précédente : $\frac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant \frac{1}{4}$.
Ainsi : $\frac{w_1}{w_0} \times \frac{w_2}{w_1} \times ... \times \frac{w_n}{w_{n-1}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times ... \times \frac{1}{4}}_{n \text{ fois}}$
$\Leftrightarrow \frac{w_n}{w_0} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
$\Leftrightarrow w_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \times w_0$
$\Leftrightarrow |v_n - u_n| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \times |v_0 - u_0| \quad \Leftrightarrow \quad |v_n-u_n| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

6. D'après les propriétés sur les limites d'une suite géométrique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.
D'après la question précédente : $-\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Et puisque (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante alors ce sont deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel φ tel que $u_0 \leqslant \varphi \leqslant v_0$ ce qui revient à $1 \leqslant \varphi \leqslant 2$.
La fonction f est continue sur $[1\,;\,2]$ et les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel φ de l'intervalle $[1\,;\,2]$. D'après le théorème du point fixe, $f(\varphi) = \varphi$.
Ce qui revient à $\frac{2\varphi+1}{\varphi+1} = \varphi \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.
C'est une équation du second degré où $\Delta = 5$. Puisque $\Delta > 0$ cette équation admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
Puisque $\varphi \in [1\,;\,2]$, la seule solution est $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: le nombre d'or.