

Nombre complexe : racine carrée d'un nombre complexe

Racine carrée d'un nombre complexe

Soit c un nombre complexe, donc de la forme $c = a + ib$ avec $b \neq 0$.

Trouver les racines carrées de c revient à chercher un nombre complexe $z = x + iy$ tel que $z^2 = c$.

Or $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. L'égalité $z^2 = c$ a donc lieu si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Equation du second degré à coefficients complexes

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où z est un nombre complexe. Pour résoudre ce type d'équation, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Peu importe son signe, Δ admet deux racines carrées opposées δ et $-\delta$ telles que $\delta^2 = \Delta$.

De ce fait, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Exercice n°1

1. Calculer les racines carrées de $z = 3 + 4i$.
2. Calculer les racines carrées de $z = 8 - 6i$.

Exercice n°2

Résoudre l'équation $z^2 - (2 + 3i)z - 5 + i = 0$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. On pose $c = a + ib$ de sorte que $c^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. L'équation $c^2 = 3 + 4i$ est donc équivalente :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

De plus, $|z|^2 = |3 + 4i|$ ce qui revient à $a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = 5$. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} 5 - b^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} b^2 = 1 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

Si $b = 1$ alors $z = 2$. Si $b = -1$ alors $a = -2$. Les racines carrées de $3 + 4i$ sont donc $2 + i$ et $-2 - i$.

2. On pose $c = a + ib$ de sorte que $c^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. L'équation $c^2 = 8 - 6i$ est donc équivalente :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

De plus, $|z|^2 = |8 - 6i|$ ce qui revient à $a^2 + b^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} 10 - b^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

Ce qui revient à

$$\begin{cases} b^2 = 1 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

Si $b = 1$ alors $a = -3$ et si $b = -1$ alors $a = 3$. Les racines carrées de $8 - 6i$ sont donc $-3 + i$ et $3 - i$.

Exercice n°2

$$\Delta = (2 + 3i)^2 - 4 \times 1 \times (-5 + i) = 15 + 8i.$$

On cherche les racines carrées de $15 + 8i$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 15 \\ 2ab = 8 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \end{cases}$$

Cela nous donne $\delta_1 = 4 + i$ et $\delta_2 = -4 - i$.

Puis,

$$z_1 = \frac{-(-(2 + 3i)) - (-4 - i)}{2 \times 1} = 3 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-(2 + 3i)) - (4 + i)}{2 \times 1} = -1 + i$$