

La fonction exponentielle

1 Généralités

Propriété - Définition

Il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Cette fonction est unique et il s'agit de la **fonction exponentielle**. On la note **exp**.

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

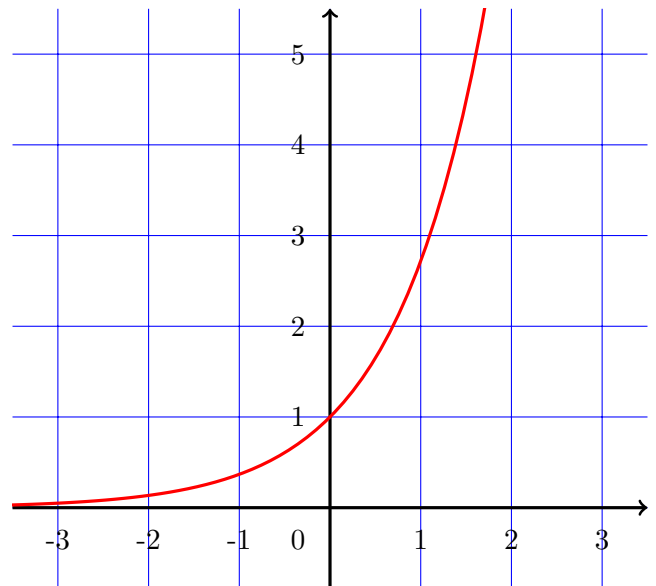
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$$

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Par définition, pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2 Propriétés

Théorème

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Remarque Grâce à cette propriété, on peut transformer un produit en une somme et réciproquement.

Corollaires

Soit n un entier naturel. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est $\exp(1) = e$. C'est ce qu'on appelle le **nombre d'Euler**. C'est un nombre irrationnel et on a $e \approx 2,718281828$.

Notation On notera dorénavant $\exp(x) = e^x$. On peut alors noter les propriétés précédentes comme ci-dessous :

Pour tous les réels x et y et pour tout n entier naturel :

$$\begin{array}{lll} e^0 = 1 & e^1 = e & e^x > 0 \\ (e^x)' = e^x & e^{x+y} = e^x e^y & e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \\ e^{-x} e^x = 1 & e^{-x} = \frac{1}{e^x} & (e^x)^n = e^{nx} \end{array}$$

Propriétés

Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

Exemple On souhaite résoudre l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 > 0$. L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Les solutions de l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$ sont donc -3 et 1 .

3 Suite géométrique et fonction exponentielle

Propriété

La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a .

Exemples

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{4n}$ est une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme 1.
On peut noter $u_n = 1 \times (e^4)^n$.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3e^{-6n}$ est une suite géométrique de raison e^{-6} et de premier terme -3 .
On peut noter $v_n = -3 \times (e^{-6})^n$.
- La suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = e^{-8n+3}$ est une suite géométrique de raison e^{-8} et de premier terme e^3 .
On a en effet $e^{-8n+3} = e^3 e^{-8n}$. On peut noter $w_n = e^3 \times (e^{-8})^n$.

Propriété - Définition

Toute suite géométrique peut s'écrire sous la forme $u_n = C \times e^{na}$.

Les points représentant graphiquement une suite géométrique suivent une **croissance exponentielle** ou **décroissance exponentielle**.

4 Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

Propriété

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(t) = ke^{kt}$$

Propriétés

Soit k un réel.

- Si $k > 0$ alors la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$ alors la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration Pour tous réels k et t : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

Or, pour tous réels k et t , $e^{kt} > 0$. Le signe de la dérivée dépend donc du signe du réel k .

Si $k > 0$ alors $ke^{kt} > 0$ et donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $k < 0$ alors $ke^{kt} < 0$ et donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

