Equations polynomiales

1 Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition (rappel) : discriminant

Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ le nombre noté Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété

On considère l'équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$. On s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{C}$.

- Si $\Delta > 0$ alors cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ alors cette équation admet une unique solution réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ alors cette équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exemple

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$.

Puisque $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-(-2) - i\sqrt{|-4|}}{2 \times 1}$ et $z_2 = \dfrac{-(-2) + i\sqrt{|-4|}}{2 \times 1}$ ce qui nous donne $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.

Propriété (rappel) : somme et produit des solutions

On considère un polynôme du second degré $az^2 + bz + c$.
La somme s et le produit p des solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont tels que :

$$s = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad p = \frac{c}{a}$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a $s = -\dfrac{b}{a} = 2$. Et $z_1 + z_2 = 1 - i + 1 + i = 2$.
De plus, $p = \dfrac{c}{a} = 2$ et $z_1 z_2 = (1+i)(1-i) = 2$.

Cette propriété est surtout utilisée pour trouver une solution quand on a connaît déjà une.

2 Equations de degré n dans $\mathbb{C}$

Définitions

On appelle **fonction polynôme** de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tout polynôme P de la forme

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

où a_0, a_1, ..., a_n sont des nombres réels appelés **coefficients** de P.
L'entier n est appelé le **degré** du polynôme P.

Théorème

On considère un polynôme P de degré n définie par $P(z) = z^n - a$ où a est un réel et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que :

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

Démonstration

Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 1$, $z^1 - a^1 = (z-a) \times 1$. On a ici $Q(z) = 1$ qui est bien de degré 0.

Hérédité

Supposons que pour un entier n supérieur ou égal à 1, on ait $z^n - a^n = (z-a)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$.

On peut ainsi écrire $z^n = (z-a)Q(z) + a^n$.

$$\begin{aligned}
z^{n+1} - a^{n+1} &= z(z^n) - a^{n+1} \\
&= z((z-a)Q(z) + a^n) - a^{n+1} \\
&= z(z-a)Q(z) + a^n z - a(a^n) \\
&= z(z-a)Q(z) + a^n(z-a) \\
&= (z-a)[zQ(z) + a^n]
\end{aligned}$$

Démonstration : suite

En posant $R(z) = zQ(z) + a^n$, on a écrit $z^{n+1} - a^{n+1} = (z-a)R(z)$ où R est un polynôme de degré n. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour ce rang. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z^n - a^n = (z-a)Q(z)$.

Propriété

Soit P un polynôme de degré n et soit a une racine de P.
P peut être factorisée par $z - a$ et on a :

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

Démonstration

Puisque a est une racine de P, on a $P(a) = 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n - P(a) \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z_n - a_0 - a_1 a - a_2 a^2 - ... - a_n a^n \\ &= a_1(z-a) + a_2(z^2 - a^2) + ... + a_n(z^n - a^n) \end{aligned}$$

Or, d'après le précédent théorème, pour chaque entier k compris entre 1 et n, il existe un polynôme Q_{k-1} de degré $k - 1$ tel que $z^k - a^k = (z-a)Q_{k-1}(z)$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(a) &= a_1(z-a)Q_0(z) + a_2(z-a)Q_1(z) + ... + a_n(z-a)Q_{n-1}(z) \\ &= (z-a)(a_1 Q_0(z) + a_2 Q_1(z) + ... + a_n Q_{n-1}(z)). \end{aligned}$$

Propriété

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration

Montrons ce résultat par récurrence. Soit P_n un polynôme non nul de degré n.

Initialisation

Pour $n = 0$, P_0 est une constante et n'admet pas de racine. Le résultat est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier n supérieur ou égal à 0, P_n admette au plus n racines. Soit A un polynôme de degré $n + 1$.

Démonstration : suite

- Si A n'a aucune racine, le résultat est vérifié.
- Sinon, soit a une racine de A. D'après la propriété précédente, on peut écrire $A(z) = (z-a)P_n(z)$ où P_n est un polynôme de degré n. Si b est une racine de A, alors $0 = A(b) = (b-a)P_n(b)$ ce qui signifie que $a = b$ ou que b est une racine de P_n. Mais d'après l'hypothèse de récurrence, P_n admet au plus n racines.
  Donc A en a au plus $n+1$.

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour ce rang. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exemple

On souhaite factoriser $P(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$.

$z = 1$ est une racine évidente de ce polynôme car $P(1) = 1^3 + 1^2 + 2 \times 1 - 4 = 0$.

On peut donc écrire $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer.
$(z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-a)z - c$. Par identification, on trouve $a = 1$, $c = 4$ et $b = 2$.
On a alors $P(z) = (z-1)(z^2 + 2z + 4)$.

Résolvons $z^2 + 2z + 4 = 0$.
$\Delta = -12$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjugués qui sont :

$$z_1 = \frac{-2 - \sqrt{|-12|}}{2 \times 1} = -1 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + \sqrt{|-12|}}{2 \times 1} = -1 + i\sqrt{3}$$

Ainsi, $P(z) = (z-1)(z+1-i\sqrt{3})(z+1+i\sqrt{3})$.