

Nombre complexe : somme des racines de l'unité

Cette somme est nulle

L'objectif est de montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la somme des racines n -ième de l'unité est égale à 0.

$$\text{On pose } S = \sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{2k\pi}{n}}.$$

Il s'agit d'une somme de terme d'une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ et de raison $q = e^{i \frac{2\pi}{n}}$. On connaît la formule qui donne cette somme :

$$S = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - (e^{i \frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i \frac{2\pi}{n}}}$$

Or $(e^{i \frac{2\pi}{n}})^n = e^{i 2\pi} = 1$. Donc $S = 0$.