Vecteurs, droites et plans : approfondissement

Fonction vectorielle de Leibniz

On note l'espace $\mathcal{E}$.
Soit n un entier naturel non nul et soit $(\mathrm{A}_i,\ \alpha_i)$, où $\leqslant i \leqslant n$, un système de points pondérés.
On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** associée à ce système de points, la fonction notée φ qui, à tout point M de l'espace associe le vecteur $\varphi(\mathrm{M}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}$:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ \mathrm{M} &\mapsto \varphi(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i} \end{aligned}$$

Exemple

On considère le système $\{(\mathrm{A},\ 2)\,;\ (\mathrm{B},\ 1),\ (\mathrm{C},\ -3)\}$.
La fonction de Leibniz associée à ce système est $\varphi : \mathrm{M} \mapsto 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

Exercice n°1 On considère la fonction de Leibniz définie sur $\mathcal{E}$ par $\varphi(\mathrm{M}) = a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ avec $(a\,;\ b\,;\ c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$.

1. Calculer $\varphi(\mathrm{A})$, $\varphi(\mathrm{B})$ et $\varphi(\mathrm{C})$.
2. Montrer que $\varphi(\mathrm{A}) - \varphi(\mathrm{B}) = (a + b + c)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et que $\varphi(\mathrm{A}) - \varphi(\mathrm{C}) = (a + b + c)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
3. En déduire que $\varphi(\mathrm{A}) = \varphi(\mathrm{B}) = \varphi(\mathrm{C})$.
4. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\varphi(\mathrm{M}) = \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur constant qui ne dépend pas de M.

Fonction vectorielle de Leibniz et barycentre

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $(\mathrm{A}_i,\ \alpha_i)$, où $1 \leqslant i \leqslant n$, un système de points pondérés. Soit φ la fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.
On appelle **barycentre** des points $(\mathrm{A}_1,\ \alpha_1)$, $(\mathrm{A}_2,\ \alpha_2)$, ..., $(\mathrm{A}_n,\ \alpha_n)$ l'unique point G de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi(\mathrm{G}) = \overrightarrow{0}$.

Remarques

- Quand tous les α_i sont égaux à 0, on dit que G est l'isobarycentre des points A_i.
- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu de [AB].
- L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $\varphi(\text{A}) = a\overrightarrow{\text{AA}} + b\overrightarrow{\text{AB}} + c\overrightarrow{\text{AC}} = b\overrightarrow{\text{AB}} + c\overrightarrow{\text{AC}}$

   $\varphi(\text{B}) = a\overrightarrow{\text{BA}} + b\overrightarrow{\text{BB}} + c\overrightarrow{\text{BC}} = a\overrightarrow{\text{BA}} + c\overrightarrow{\text{BC}}$

   $\varphi(\text{C}) = a\overrightarrow{\text{CA}} + b\overrightarrow{\text{CB}} + c\overrightarrow{\text{CC}} = a\overrightarrow{\text{CA}} + b\overrightarrow{\text{CB}}$.

2. $$\begin{aligned}\varphi(\text{A}) - \varphi(\text{B}) &= b\overrightarrow{\text{AB}} + c\overrightarrow{\text{AC}} - a\overrightarrow{\text{BA}} - c\overrightarrow{\text{BC}}\\ &= b\overrightarrow{\text{AB}} + c\overrightarrow{\text{AC}} + a\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{CB}}\\ &= (a+b)\overrightarrow{\text{AB}} + c(\overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{CB}})\\ &= (a+b)\overrightarrow{\text{AB}} + c\overrightarrow{\text{AB}}\\ &= (a+b+c)\overrightarrow{\text{AB}}.\end{aligned}$$

   On montre, de la même façon, que $\varphi(\text{A}) - \varphi(\text{C}) = (a+b+c)\overrightarrow{\text{AC}}$.

3. $\varphi(\text{A}) - \varphi(\text{C}) = (a+b+c)\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{0}$ puisque $a+b+c=0$.
   Ainsi, $\varphi(\text{A}) = \varphi(\text{C})$. Pour les mêmes raisons, $\varphi(\text{A}) = \varphi(\text{B})$.
   Finalement : $\varphi(\text{A}) = \varphi(\text{B}) = \varphi(\text{C})$.

4. $$\begin{aligned}\varphi(\text{M}) &= a\overrightarrow{\text{MA}} + b\overrightarrow{\text{MB}} + c\overrightarrow{\text{MC}}\\ &= a\overrightarrow{\text{MA}} + b(\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{AB}}) + c(\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{AC}})\\ &= (a+b+c)\overrightarrow{\text{MA}} + b\overrightarrow{\text{AB}} + c\overrightarrow{\text{AC}}\\ &= b\overrightarrow{\text{AB}} + c\overrightarrow{\text{AC}}.\end{aligned}$$

   Ce qui ne dépend pas de M.