# Approximation et méthode d'Euler

## > Partie théorique

Le but de ce TP est de trouver une approximation des valeurs de la fonction exponentielle en utilisant la méthode d'Euler. C'est une procédure numérique qui consiste à résoudre des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. C'est le cas ici pour la fonction exponentielle. On cherche une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ (équation différentielle du premier ordre) et telle que $f(0) = 1$ (condition initiale).

Partons de la définition : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

On peut alors écrire pour un $h$ extrêmement petit : $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Puisque $f' = f$ on a alors : $f(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\Leftrightarrow hf(x) \approx f(x+h) - f(x)$

$\Leftrightarrow f(x+h) \approx hf(x) + f(x)$

$\Leftrightarrow f(x+h) \approx f(x)(1+h)$.

Pour $x = 0$ on obtient $f(h) \approx f(0)(1+0)$ et d'après notre condition initiale : $f(h) = 1 + h$.

On obtient ainsi :

Pour $x = 0$ : $f(h) \approx 1 + h$
Pour $x = h$ : $f(x+h) = f(2h) \approx (1+h)f(h) \approx (1+h)^2$
Pour $x = 2h$ : $f(x+h) = f(3h) \approx (1+h)f(2h) \approx (1+h)^3$
et ainsi de suite.

Ainsi, si on souhaite calculer une valeur précise $f(x)$, il suffit de poser $h = \dfrac{x}{n}$ (afin d'avoir $x = nh$) où $n$ est un entier naturel.
On obtient donc $f(x) = f(nh) = (1+h)^n$ que l'on peut également écrire :

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Nous allons utiliser cette formule pour obtenir une approximation de $e^x$ pour un réel $x$ donné mais également une approximation de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

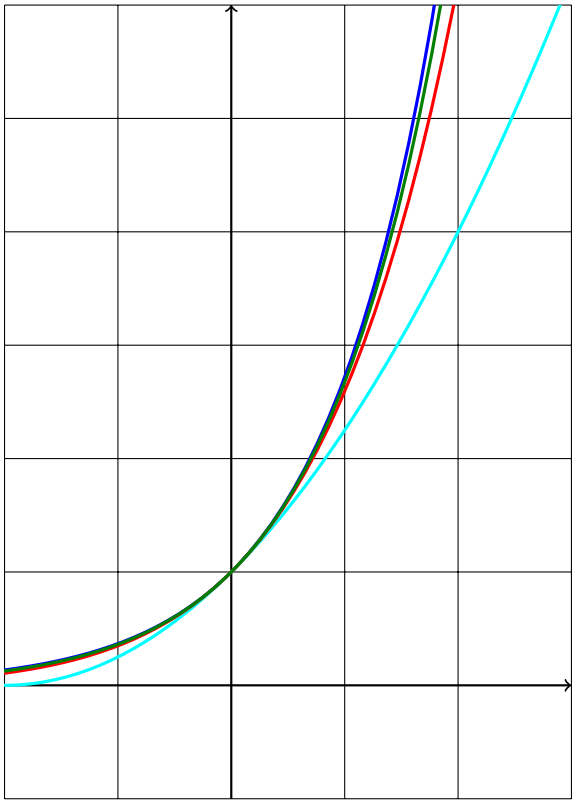
## > Application

On souhaite déterminer une approximation de $e$ soit exp(1).
On programme la formule précédemment établie dans un programme Python et on saisit des valeurs de $n$, de plus en plus grande.

```
def exponentielle(n):
    a=pow(1+1/n,n)
    return(a)
```

En testant avec $n = 100$, on trouve $e \approx 2,705$. Pour $n = 10\,000$, on trouve $e \approx 2,7181459268249255$ qui est une très bonne approximation.

### Courbe représentative

L'idée est de tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ pour des valeurs de l'entier naturel $n$ de plus en plus grande.

Voici des résultats pour $n = 2$ (en bleu clair), $n = 10$ (en rouge) et $n = 30$ (en vert). On compare ces approximations à la vraie courbe représentative de la fonction exponentielle en bleu foncé.