Second degré : approfondissement

Factorisation supplémentaire : $x^n - 1$

Propriété : Soit n un entier naturel différent de 0. Pour tout réel x :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$$

Démonstration

1. Montrer ce résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Développer l'expression $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$ puis conclure.

Solution

1. Pour $n = 2$: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, c'est une identité remarquable. La propriété est vérifiée.

   Pour $n = 3$: $x^3 - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.
   $(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
   Par identification des coefficients, on trouve $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$. La propriété est vérifiée.

2. $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - x - 1$

   Les seuls termes ne disposant pas de leur opposé sont x^n et -1. Ainsi :

   $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - x - 1 = x^n - 1$.

Factorisation supplémentaire : $x^n - a^n$

Propriété : Soit n un entier naturel différent de 0 et soit a un réel. Pour tout réel x :

$$x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k \times a^{n-1-k} = (x-a)(x^0 \times a^{n-1} + x^1 \times a^{n-2} + ... + x^{n-2} \times a^1 + x^{n-1} \times a^0)$$

Démonstration Démontrer la propriété en développant l'expression du membre de droite.

Solution

$$(x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k \times a^{n-1-k} = (x-a)(x^0 \times a^{n-1} + x^1 \times a^{n-2} + ... + x^{n-2} \times a^1 + x^{n-1} \times a^0)$$

$$= xa^{n-1} + x^2a^{n-2} + ... + x^{n-1}a + x^n - a^n - a^{n-1}x - ... - x^{n-2}a^2 - x^{n-1}a$$

Les seuls termes ne disposant par de leur opposé sont x^n et $-a^n$. Ainsi :

$$= xa^{n-1} + x^2a^{n-2} + ... + x^{n-1}a + x^n - a^n - a^{n-1}x - ... - x^{n-2}a^2 - x^{n-1}a$$

$$= x^n - a^n.$$