

Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Propriété sur les racines rationnelles

On considère un polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

où tous les a_k sont des entiers.

P admet des solutions rationnelles de la forme $\frac{p}{q}$ si p divise a_0 et si q divise a_n .

Exercice n°1

1. Donner les solutions rationnelles du polynôme P défini par $P(X) = 4X^3 + 4X^2 + 5X - 4$.
2. Donner les solutions rationnelles du polynôme P défini par $P(X) = 5X^3 - 4X^2 + 3X + 2$.
3. Donner les solutions rationnelles du polynôme P défini par $P(X) = 3X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 6X - 4$.
4. Donner les solutions rationnelles du polynôme P défini par $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Si ce polynôme admet des racines rationnelles de la forme $\frac{p}{q}$ alors q divise 4 et p divise -4 .

Les deux nombres ont les mêmes diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; -1 ; -2 et -4 .

Il suffit ensuite de réaliser toutes les combinaisons possibles, ce qui donne :

$$\left\{ 1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 2; -2; 4; -4 \right\}.$$

On teste ensuite chacune de ces valeurs.

Une seule ici est racine de P , c'est $\frac{1}{2}$.

2. Si P admet des racines rationnelles de la forme $\frac{p}{q}$ alors q divise 5 et p divise 2.

Les diviseurs de 5 sont 1 ; 5 ; -1 et -5 et les diviseurs de 2 sont 1 ; 2 ; -1 et -2 .

Il suffit maintenant de réaliser toutes les combinaisons possibles, ce qui donne :

$$\left\{ 1; \frac{1}{5}; -1; \frac{-1}{5}; 2; \frac{2}{5}; -2; -\frac{2}{5} \right\}$$

On teste ensuite chacune de ces valeurs. Aucune ne fonctionne. Cela signifie que P n'admet aucune racine rationnelle.

3. Si P admet des racines rationnelles de la forme $\frac{p}{q}$ alors p divise -4 et q divise 3.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; 2 ; 4 ; -1 ; -2 et -4 et les diviseurs de 3 sont 1 ; 3 ; -1 et -3 .

Il suffit maintenant de réaliser toutes les combinaisons possibles, ce qui donne :

$$\left\{ 1; \frac{1}{3}; -1; -\frac{1}{3}; 2; \frac{2}{3}; -2; -\frac{2}{3}; 4; \frac{4}{3}; -4; -\frac{4}{3} \right\}$$

On teste ensuite chacune de ces valeurs. Les seules racines rationnelles de P sont 1 et $-\frac{2}{3}$.

4. Pour ce dernier exemple, il faut que p divise -1 et q divise 1. Les seules potentielles racines rationnelles sont donc 1 et -1 .

Une seule fonctionne : c'est 1.