

Nombre complexe : Formule de Viète

Formule de Viète

François Viète était un mathématicien français du XVI^{ème} siècle, très proche des rois de France de cette époque.

Soit P un polynôme de degré n de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

La somme des racines complexes du polynôme P est égale à

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Exercice n°1 : démonstration

1. On admet que P admet n racines complexes.
Ecrire $P(x)$ sous forme factorisée en notant $r_1, r_2, \dots, r_n$ les racines de P .
2. Montrer que $a_{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n)$.
3. En déduire la formule de Viète.

Exercice n°2 : application

1. Trouver une racine évidente du polynôme P défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.
2. En déduire la deuxième racine de P .

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Notons $r_1, r_2, \dots, r_n$ les n racines de P .

On a alors $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_{n-1})(x - r_n)$.

2. En développant partiellement cette nouvelle forme de $P(x)$, on obtient :

$$P(x) = a_n r_n - a_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n r_1 r_2 \dots r_n.$$

On sait de plus que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Par identification, on a alors :

$$a_{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

3. Puisque $a_{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n)$, en divisant par $-a_n$ de chaque côté de l'égalité on obtient :

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

a_n est différent de 0 puisque P est de degré n .

Exercice n°2

1. $P(1) = 3 \times 1^3 - 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 2$.

Ainsi, $z_1 = 1$ est une racine évidente de P .

2. D'après la formule de Viète, la somme des racines est égale à $\frac{2}{3}$. En notant z_2 la deuxième racine de P on a donc

$$z_1 z_2 = \frac{2}{3}$$

ce qui donne

$$1 \times z_2 = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad z_2 = \frac{2}{3}$$