Limite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Rappel

Soit X une variable aléatoire. On note μ son espérance et V sa variance.
Pour tout réel $\delta > 0$:

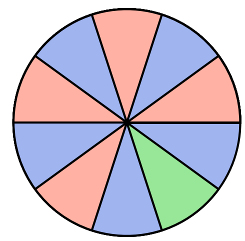
$$P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Le but est de montrer les limites, notamment le manque d'optimisation de cette inégalité pourtant universelle.

Exercice n°1

On considère la roue de loterie suivante.

On fait tourner 20 fois cette rouge et on note X la variable aléatoire associé au nombre de fois où l'on tombe sur un secteur rouge.



1. Quelle est la loi suivie par X ? En donner les paramètres.
2. Déterminer l'espérance μ, la variance V et l'écart-type σ de X.
3. Déterminer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, une majoration de $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma)$.
4. En utilisant le programme Python vu dans le chapitre loi binomiale, déterminer $P(|X - 8| \geqslant 4)$.
5. Conclure quant au problème initial de cette activité.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Il s'agit d'une répétition de 20 lancers identiques et indépendants.
   La probabilité de tomber sur un secteur rouge lors d'un lancer est de $\dfrac{4}{10}$ soit 0,4.
   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,4$.

2. $\mu = 20 \times 0,4 = 8$, $V(X) = 20 \times 0,4 \times 0,6 = 4,8$ et $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4,8} \approx 2,2$.

3. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en prenant $\mu = 8$, $V(X) = 4,8$ et $\delta = 2\sigma \approx 4,4$.

$$\begin{aligned} & P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2} \\ \Leftrightarrow \quad & P(|X-8| \geqslant 4,4) \leqslant \frac{4,8}{4,4^2} \\ \Leftrightarrow \quad & P(|X-8| \geqslant 4,4) \leqslant 0,25 \end{aligned}$$

4. On observe que $P(|X-8| \geqslant 4,4) = P(|X-8| \geqslant 4) = P(X \leqslant 4) + P(X \geqslant 12)$.
   Le programme suivant permet de calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} p(X=i)$.

```python
def coeff(n,k):
  if k>n:
    return 0
  e=1
  if 2*k>n:
    k=n-k
  for i in range(1,k+1):
    e=(e*(n-k+i))//i
  return(e)

def binomiale(n,p,k):
  prob=p**k*(1-p)**(n-k)
  return coeff(n,k)*prob

def SommeBinom(n,p,k):
  S=0
  for i in range(k+1):
    S=binomiale(n,p,i)+S
  return S
```

   \>> print(SommeBinom(20,0.4,4))
   \>> 0.0509519531941665

   \>> print(1-SommeBinom(20,0.4,11))
   \>> 0.05652636703425307

   Donc $P(|X-8| \geqslant 4) \approx 0,1$.

5. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est donc pas optimale puisqu'elle donne une majoration de 0,25 alors que la valeur réelle est d'environ 0,1.