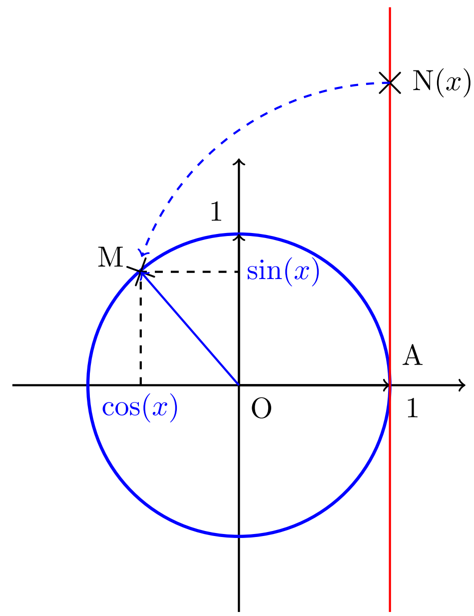
# Trigonométrie : cosinus et sinus

## 1 Cosinus et sinus d'angles orientés

**Définitions**

Soit M un point du cercle trigonométrique associé à un réel $x$.
Le **cosinus** de $x$ est l'abscisse du point M et le **sinus** de $x$ est l'ordonnée du point M.




**Propriétés**

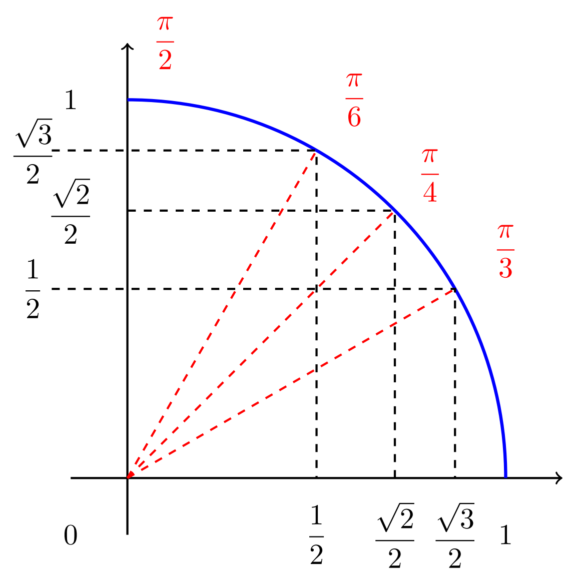
Soit $x$ un réel et soit $k$ un entier relatif.

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

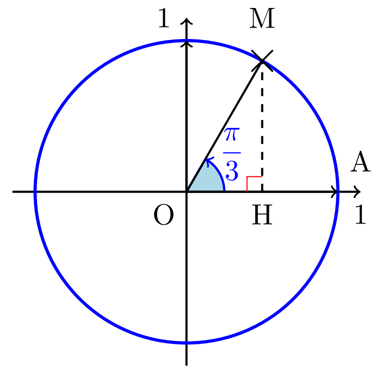
**Valeurs remarquables des cosinus et sinus d'angles orientés**

| $\boldsymbol{x}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **cos($\boldsymbol{x}$)** | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $1$ |
| **cos($\boldsymbol{x}$)** | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $0$ |

Nous verrons, dans la prochaines partie, comment déterminer les cosinus et sinus des autres valeurs remarquables du cercle trigonométrique.
Ci-contre, les cosinus et sinus positifs de valeurs remarquables du cercle.



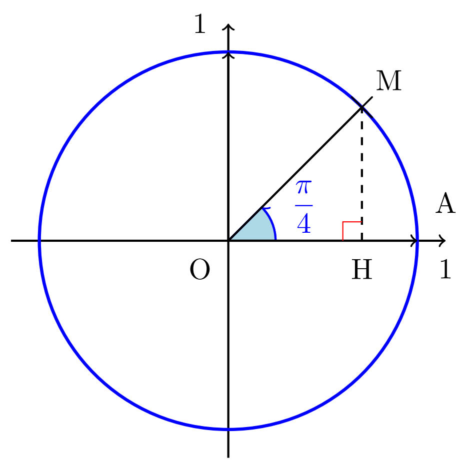
## Démonstrations




- Pour la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

  On considère le point M du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{3}$. M et A sont sur le cercle donc OMA est isocèle en O. Les deux angles à la base sont de même mesure.

  On sait de plus que $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$. Puisque la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, donc $\pi$ radian, les deux autres angles sont aussi égaux à $\frac{\pi}{3}$ radians. OMA est donc un triangle équilatéral.
  Soit H le pied de la hauteur issue de M. Dans un triangle équilatéral, les hauteurs, médiatrices et médianes sont confondues. On a ainsi $OH = HA = \frac{1}{2}$.
  Pour trouver MH : MAH est rectangle en H alors d'après le théorème de Pythagore :
  $MO^2 = MH^2 + AM^2$
  $1^2 = MH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
  $MH^2 = \frac{3}{4}$. On ne prend que la solution positive car l'ordonnée de M est positive. Donc $MH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.




- Pour la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

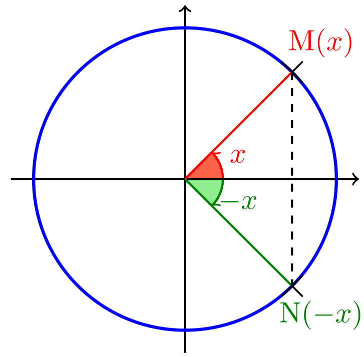
  On procède de façon analogue. On considère le point M du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{4}$.
  Puisque $\widehat{MOH} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{OHM} = \frac{\pi}{2}$ (90°) et que la somme des angles d'un triangle est égale à $\pi$ radian, alors $\widehat{OMH} = \frac{\pi}{4}$. MOH est ainsi isocèle en H et $OH = HM$.
  On en déduit donc que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
  D'après la précédente propriété, pour tout réel $x$ on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
  En particulier, pour $x = \frac{\pi}{4}$ on a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$
  Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ cela est équivalent à $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$ ce qui est équivalent à $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Là encore, on ne prend que la solution positive car l'abscisse et l'ordonnée recherchées sont positives.

**Remarque** On peut aussi retrouver ces résultats à l'aide des formules de trigonométrie du triangle rectangle vues en classe de 3ème : $\cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ et $\sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

## 2 Cosinus et sinus d'angles associés

**Définition**

On dit que des angles orientés sont **associés** s'ils admettent des cosinus et/ou des sinus opposés.




**Propriétés**

Soit $x$ un réel.

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

**Propriétés**

Soit $x$ un réel.

(1) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

(2) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

(3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

(4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

**Exemples**

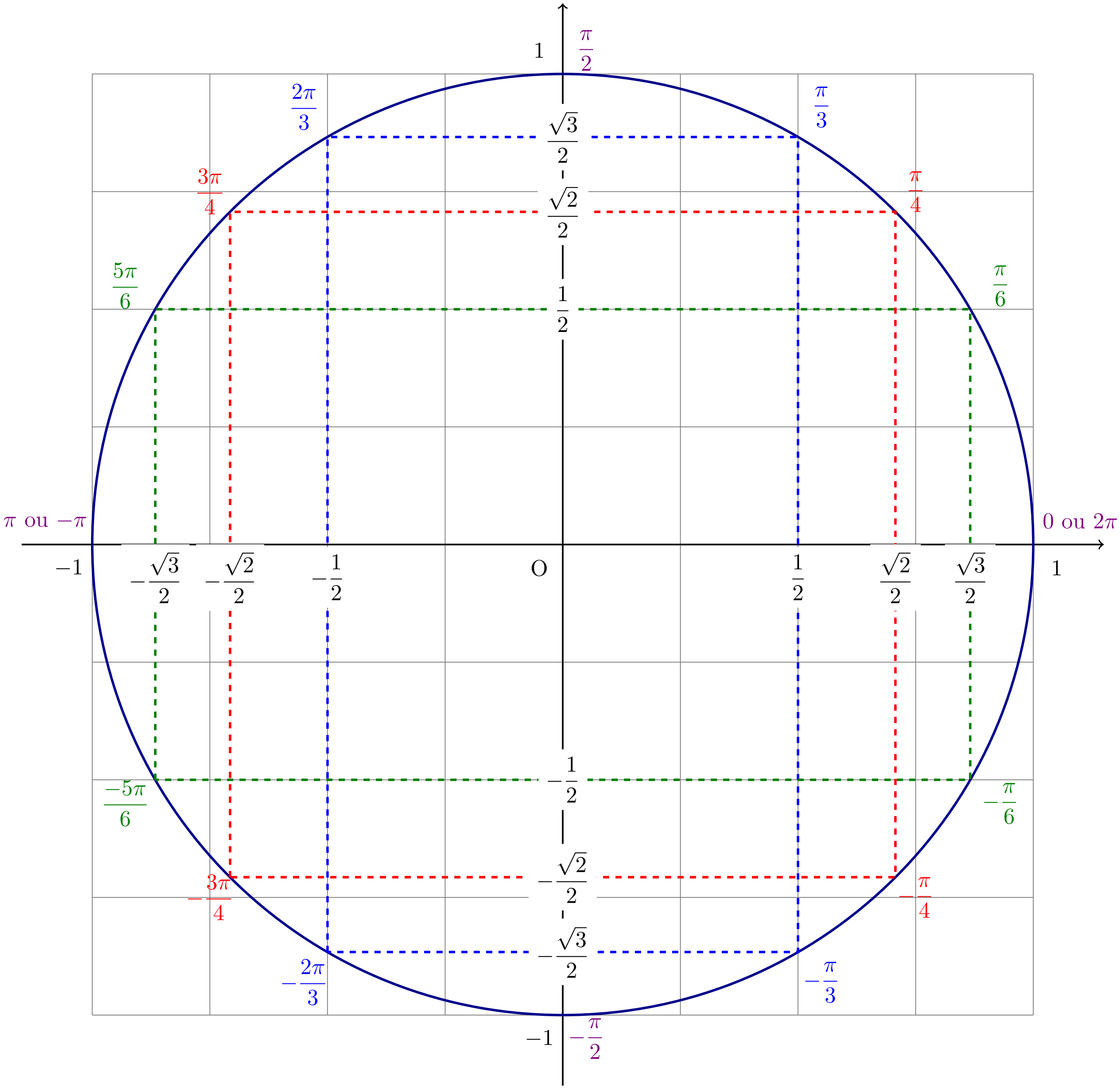
On souhaite trouver la valeur de $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$. On utilise les propriétés (2) : $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On cherche $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ : $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

On cherche $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

**Remarque** On peut apprendre par cœur ces formules mais on peut aussi facilement les retrouver à partir du cercle trigonométrique.
Pour les formules (1), il suffit de partir du radian $x$ et d'ajouter un demi-tour.
Pour les formules (2), on part du radian $\pi$ et on enlève le radian $x$.
Pour les formules (3), on part du radian $x$ et on ajoute un quart de tour.
Pour les formules (4), on part de la valeur $\dfrac{\pi}{2}$ et on enlève le radian $x$.

On peut ainsi retenir les valeurs du cercle trigonométriques suivants. Une fois les valeurs de la première partie de cette leçon placées sur le cercle, les autres s'obtiennent par symétries axiales d'axe des abscisses et/ou ordonnées.

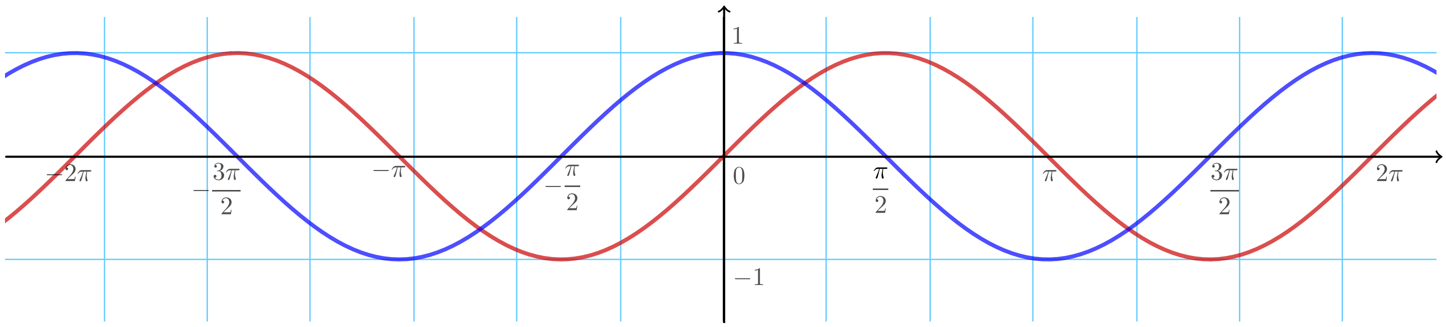



## 3 Fonctions cosinus et sinus

**Définitions**

Soit $x$ un nombre réel.
On appelle fonction **cosinus** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à $x$ associe $\cos(x)$.
On appelle fonction **sinus** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à $x$ associe $\sin(x)$.

Voici les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,2\pi]$ :
En rouge, la courbe représentative de la fonction sinus et en bleu la courbe représentative de la fonction cosinus.




On retrouve les valeurs de $x$ pour lesquelles le cosinus et le sinus s'annulent. On remarque également une certaine « répétition » des deux courbes...

**Propriétés**

- La fonction cosinus est paire : pour tout $x$ réel on a $\cos(-x) = \cos(x)$. Sa courbe représentative admet donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus est impaire : pour tout $x$ réel on a $\sin(-x) = -\sin(x)$. Sa courbe représentative admet donc une symétrie par rapport à l'origine du repère.

**Définition**

Soit $t$ un nombre réel. On dit qu'une fonction $f$ est **périodique** de période $t$ si pour tout réel $x$ $f(x+t) = f(x)$.
Dans ce cas, on dit que $f$ est $t-$périodique.

**Propriétés**

Les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi-$périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x+2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

**Remarque** C'est pour cette raison que l'on retrouve les mêmes « morceaux » de courbes sur chaque intervalle de longueur $2\pi$.