



Simulation d'échantillon

Observer la loi des grands nombres

Le but de cette activité est d'observer la loi des grands nombres. Pour cela, on va simuler numériquement des valeurs d'une variable aléatoire et considérer la variable aléatoire M_n .

Exercice n°1

On considère une variable aléatoire X qui prend des valeurs entières entre 1 et 5 de façon équiprobable.
On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X .

1. Simuler 500 valeurs de la variable M_n et estimer la probabilité $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ où δ est un réel strictement positif.
On testera le programme pour différentes valeurs de δ et des valeurs de n de plus en plus grandes.
2. Que remarque-t-on ?
3. Justifier ce résultat puis l'interpréter.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Puisque chaque valeur est prise de façon équiprobable, on a $P(X = k) = \frac{1}{5}$ où k est un entier tel que $1 \leq k \leq 5$.

$$\text{Ainsi : } \mu = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times 2 + \frac{1}{5} \times 3 + \frac{1}{5} \times 4 + \frac{1}{5} \times 5 = 3.$$

On a donc $P(|M_n - \mu| \geq \delta) = P(|M_n - 3| \geq \delta)$.

Voici le programme Python permettant de simuler 500 valeurs de M_n :

```
1 import random as rd
2 import math
3
4 def simulationMn(n):
5     S=[rd.randint(1,5) for i in range(n)]
6     Mn=sum(S)/n
7     return Mn
8
9 def echantillonMn(delta,n):
10    echantillon=[simulationMn(n) for i in range(500)]
11    c=0
12    for e in echantillon:
13        if abs(e-3)>=delta:
14            c=c+1
15    return c/500
```

```
>>> print(echantillonMn(0.5,10))
```

```
>>> 0.332
```

```
>>> print(echantillonMn(0.5,1000))
```

```
>>> 0.0
```

```
>>> print(echantillonMn(0.2,10))
```

```
>>> 0.74
```

```
>>> print(echantillonMn(0.2,100))
```

```
>>> 0.156
```

```
>>> print(echantillonMn(0.05,10))
```

```
>>> 0.92
```

```
>>> print(echantillonMn(0.05,1000))
```

```
>>> 0.226
```

2. Plus n augmente, plus $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ se rapproche de 0.

Plus δ est petit, plus il faut augmenter la valeur de n pour que $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ se rapproche de 0.

3. D'après la loi des grands nombres, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$.

Dans le cadre de notre activité : plus la taille de notre échantillon est grand, plus l'écart entre la moyenne de cette échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est petit, se rapprochant de 0.