Correction des exercices sur le produit sacalire (2)

> Produit scalaire et projeté orthogonal

Exercice n°1

1. $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA} = CD \times CC = 0$ (en projetant orthogonalement A sur (CD))
2. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = AD \times OO = 0$ (en projetant orthogonalement C et B sur (AD))
3. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = BD \times BD = a^2$ (en projetant orthogonalement A et B sur (BD))
4. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB \times AB = \frac{a^2}{2}$ (en projetant orthogonalement O sur (AB))
5. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} = DB \times DB = a^2$ (en projetant orthogonalement A sur (DB))

Exercice n°2

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times \frac{1}{2}AB = 4 \times 2 = 8$

b. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -BA \times \frac{1}{2}BC = -4 \times 2 = -8$

c. $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD} = -DB \times \frac{1}{2}DB = -4 \times 2 = -8$

d. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} = DB \times OO = 0$ où O est le projeté orthogonal de A et C sur (DB)

e. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = BA \times BA = 4 \times 4 = 16$

Exercice n°3

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 4 \times 4 = 16$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH = 4 \times 2 = 8$

c. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BF} = BA \times BH = 4 \times 2 = 8$

d. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE} = AD \times DD = 0$

e. $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BA} = -CE \times CD = -3 \times 4 = -12$

f. $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DA} = -DA \times DA = -3 \times 3 = -9$

> Etudier l'orthogonalité dans le plan

Exercice n°4

1. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2-(-3)\\-3-(-1)\end{pmatrix} = \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\1-(-1)\end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 1\times 4 + (-2)\times 2 = 0$. Puisque le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à 0, les deux vecteurs sont orthogonaux. Les droites (CB) et (CA) sont donc perpendiculaires.

2. Là encore, on va vérifier si le produit scalaire de deux vecteurs est égal à 0.
   $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = 0\times 3 + (-5)\times(-3) = 15$. Il n'y a donc pas d'angle droit en D.
   $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{FE} = 0\times(-3) + (-5)\times(-2) = 10$. Il n'y a donc pas d'angle droit en E.
   $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{FE} = 3\times(-3) + (-3)\times(-2) = -3$. Il n'y a donc pas d'angle droit en F.
   Le triangle DEF n'est donc pas un triangle rectangle.

Exercice n°5

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{FE} = 2\times(-3) + 3\times 0 = -6$.

2. Puisque le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{FE}$ n'est pas égal à 0, les droites (AB) et (FE) ne sont pas perpendiculaires.

Exercice n°6

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -1\times 9 + (-3)\times(-3) = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux ce qui signifie que le triangle ABC est rectangle en B.

b. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3\times(-1) + (-9)\times(-5) = 48$ Donc le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -3\times 2 + (-9)\times 4 = -42$ Donc le triangle ABC n'est pas rectangle en B.
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = -1\times 2 + (-5)\times 4 = -22$ Donc le triangle ABC n'est pas rectangle en C.

Exercice n°7

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0. Il faut donc que :

$$\begin{aligned}
&(1+m)(-2+m)+(2+m)(1+m)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+m)(-2+m+2+m)=0\\
\Leftrightarrow\ &2m(1+m)=0\\
\Leftrightarrow\ &1+m=0 \quad \text{ou} \quad 2m=0\\
\Leftrightarrow\ &m=-1 \quad \text{ou} \quad m=0
\end{aligned}$$

Exercice n°8

Soit M un point de ce cercle et dont l'abscisse vaut 1. Notons y son ordonnée. On a alors M$(1\,;\,y)$.
M est sur le cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{\text{MA}}.\overrightarrow{\text{MB}}=0$.

On a $\overrightarrow{\text{MA}}\begin{pmatrix}-2-1\\3-y\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{MA}}\begin{pmatrix}-3\\3-y\end{pmatrix}$. De même, on trouve $\overrightarrow{\text{MB}}\begin{pmatrix}2\\-y\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{MA}}.\overrightarrow{\text{MB}}=0$

$\Leftrightarrow -3\times 2+(3-y)\times(-y)=0$

$\Leftrightarrow y^2-3y-6=0$

$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-6)=33>0$. L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$$y_1=\frac{-(-3)-\sqrt{33}}{2\times 1}=\frac{3-\sqrt{33}}{2} \quad \text{et} \quad y_2=\frac{-(-3)+\sqrt{33}}{2\times 1}=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$$

Les deux points recherchés sont donc $\text{M}\left(1;\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)$ et $\text{N}\left(1;\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)$.

Exercice n°9

Un point est sur l'axe des ordonnées si et seulement si son abscisse vaut 0.
Soit M un point de ce cercle et dont l'abscisse vaut 0. Notons y son ordonnée. On a alors M$(0\,;\,y)$.
M est sur le cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{\text{MA}}.\overrightarrow{\text{MB}}=0$.

On a $\overrightarrow{\text{MA}}\begin{pmatrix}-3-0\\0-y\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{MA}}\begin{pmatrix}-3\\-y\end{pmatrix}$. De même, on trouve $\overrightarrow{\text{MB}}\begin{pmatrix}2\\2-y\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{MA}}.\overrightarrow{\text{MB}}=0$

$\Leftrightarrow -3\times 2+(-y)(2-y)=0$

$\Leftrightarrow y^2-2y-6=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-6)=28>0$. L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$$y_1=\frac{-(-2)-\sqrt{28}}{2\times 1}=\frac{2-\sqrt{28}}{2}=1-\sqrt{7} \quad \text{et} \quad y_2=\frac{-(-2)+\sqrt{28}}{2\times 1}=\frac{2+\sqrt{28}}{2}=1+\sqrt{7}$$

Les deux points recherchés sont donc $\text{M}\left(0;1-\sqrt{7}\right)$ et $\text{N}\left(0;1+\sqrt{7}\right)$.

> Choisir une méthode adaptée pour résoudre un problème

Exercice n°10

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-1)\\1-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 5\times(-2)+(-1)\times(-4) = -6$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$ et $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} &= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{CD}\|\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\\ &= \sqrt{26}\times\sqrt{20}\times\cos(\widehat{BOD})\\ &= 2\sqrt{130}\times\cos(\widehat{BOD})\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -6$ donc $-6 = 2\sqrt{130}\times\cos(\widehat{BOD})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BOD}) = \dfrac{-6}{2\sqrt{130}}$. Puis $\arccos\left(\dfrac{-6}{2\sqrt{130}}\right)\approx 105°$.

Exercice n°11

1. D est le projeté orthogonal de C sur (AD). Ainsi : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD\times AD = 3\times 3 = 9$.

   Or $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$ (1)

   Pour calculer AC^2, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D :

   $$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 25$$

   Ainsi, l'égalité (1) devient :

   $$\begin{aligned}9 &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\|^2 - 25\right)\\ \Leftrightarrow 18 &= \|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\|^2 - 35\\ \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\|^2 &= 52\\ \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\| &= \sqrt{52}\end{aligned}$$

2. B est le projeté orthogonal de C sur (AE) : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = AE\times AB = 6\times 4 = 24$.

3. $$\begin{aligned}\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{ED} &= \left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}BA+\frac{3}{2}BA+0+0+AD\times AD\\ &= 21\end{aligned}$$

Le triangle EBC est rectangle en B alors d'après le théorème de Pythagore :

$$\text{EC}^2 = \text{EB}^2 + \text{BC}^2 = 13$$
$$\text{Donc EC} = \sqrt{13}$$

De même, on trouve $\text{ED} = \sqrt{45}$.

On a ainsi $\overrightarrow{\text{EC}}.\overrightarrow{\text{ED}} = 21$ mais aussi $\overrightarrow{\text{EC}}.\overrightarrow{\text{ED}} = \text{ED} \times \text{EC} \times \cos(\overrightarrow{\text{EC}}, \overrightarrow{\text{ED}})$

On obtient ainsi $21 = \sqrt{13} \times \sqrt{45} \times \cos(\overrightarrow{\text{EC}}, \overrightarrow{\text{ED}})$ soit $\cos(\overrightarrow{\text{EC}}, \overrightarrow{\text{ED}}) = \dfrac{21}{\sqrt{13} \times \sqrt{45}}$

Enfin, $(\overrightarrow{\text{EC}}, \overrightarrow{\text{ED}}) = \arccos\left(\dfrac{21}{\sqrt{13} \times \sqrt{45}}\right) \approx 30°$.

Exercice n°12

1. $\overrightarrow{\text{BD}}.\overrightarrow{\text{AC}} = \text{BD} \times \text{EF}$ (en utilisant le projeté orthogonal de A et C sur (BD).
   $\overrightarrow{\text{BD}}.\overrightarrow{\text{AC}} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\text{BD}} + \overrightarrow{\text{AC}}\|^2 - \|\overrightarrow{\text{BD}}\|^2 - \|\overrightarrow{\text{AC}}\|^2\right)$

2. Le triangle ADB est rectangle en A alors d'après le théorème de Pyhtagore :

   $$\text{BD}^2 = \text{AB}^2 + \text{AD}^2$$
   $$\text{BD}^2 = 3^2 + 6^2$$
   $$\text{BD}^2 = 45$$

   Donc $\text{BD} = \text{AC} = \sqrt{45}$ puisque les diagonales d'un rectangle sont de même longueur. En utilisant la deuxième formule de la précédente question, on trouve :

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BD}}.\overrightarrow{\text{AC}} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\text{BD}} + \overrightarrow{\text{AC}}\|^2 - \|\overrightarrow{\text{BD}}\|^2 - \|\overrightarrow{\text{AC}}\|^2\right)\\ &= \left(\|2\overrightarrow{\text{BC}}\|^2 - \sqrt{45}^2 - \sqrt{45}^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(144 - 45 - 45)\\ &= 27\end{aligned}$$

   En reprenant maintenant la première formule de la question précédente on obtient cette fois-ci :

   $$\overrightarrow{\text{BD}}.\overrightarrow{\text{AC}} = \text{BD} \times \text{EF}$$
   $$27 = \sqrt{45} \times \text{EF}$$
   $$\text{EF} = \frac{27}{\sqrt{45}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

Exercice n°13

1. A(0 ; 0), B(L ; 0), C(L ; l), D(0 ; l), M(x ; 0), N(L ; x), P($L-x$; l) et Q(0 ; $l-x$).

   Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur. Il faudrait donc que MP = QN.

   $\text{MP} = \sqrt{(L-x-x)^2+(l-0)^2} = \sqrt{L^2-4xl+4x^2+l^2}$ et $\text{QN} = \sqrt{(L-0)^2+(x-(l-x))^2} = \sqrt{L^2+l^2-4xl+4x^2}$

   $\text{MP} = \text{QN} \Leftrightarrow \sqrt{L^2-4xl+4x^2+l^2} = \sqrt{L^2+l^2-4xl+4x^2}$

   $\Leftrightarrow L^2-4xL+4x^2+l^2 = L^2+l^2-4xl+4x^2$

   $\Leftrightarrow -4xL = -4xl$

   $\Leftrightarrow L = l$ ($x \neq 0$ puisque c'est une longueur)

   Ainsi, MNPQ est un rectangle si et seulement $L = l$ donc si ABCD est un carré.

2. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

   MNPQ est un losange si et seulement si (QN) et (MP) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{\text{QN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{\text{QN}}.\overrightarrow{\text{MP}} = 0$.

   $\overrightarrow{\text{QN}}\begin{pmatrix} L \\ x-(l-x) \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{QN}}\begin{pmatrix} L \\ l+2x) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}\begin{pmatrix} L-2x \\ l \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{\text{QN}}.\overrightarrow{\text{MP}} = 0$

   $\Leftrightarrow L(L-2x)+l(2x-l) = 0$

   $\Leftrightarrow L^2-2xL+2xl-l^2 = 0$

   $\Leftrightarrow (L-l)(L+l)+2x(L-l) = 0$

   $\Leftrightarrow (L-l)(L+l+2x) = 0$

   $\Leftrightarrow L-l = 0$ (car $(L+l+2x>0)$)

   $\Leftrightarrow L = l$.

   Ainsi, pour que MNPQ soit un losange, il faut que ABCD soit un carré.