Correction des exercices sur les suites arithmétique et géométrique

> Vérifier qu'une suite est arithmétique

Exercice n°1

a. $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_2 = \dfrac{4}{3}$. Or $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$. Ce n'est donc pas une suite arithmétique.

b. L'expression générale d'une suite arithmétique (u_n) est $u_n = u_0 + rn$. Ici, le premier terme est $u_0 = 1$ et la raison est $r = 50$.

c. $u_0 = 25$, $u_1 = 35$ et $u_2 = 45$. Il semble qu'il s'agisse d'une suite arithmétique de raison 10.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1+5)^2 - (n+1)^2 - \left[(n+5)^2 - n^2\right] \\ &= n^2 + 12n + 36 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 10n - 25 + n^2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 10$. Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 25$.

d. $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 3$. Or $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$. Ce n'est donc pas une suite arithmétique.

Exercice n°2

a. $u_0 = 2$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$. La différence entre deux termes consécutifs n'est jamais la même. Ce n'est donc pas une suite arithmétique.

b. (u_n) est définie comme une suite arithmétique de raison 4. On ajoute 4 au précédent terme pour obtenir le suivant.

Exercice n°3

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\dfrac{5u_n - 1 - u_n - 3}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 1} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{4}{4u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 1}{4u_n - 4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 1}{4(u_n - 1)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}$$

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = 1$.

> Etude des suites arithmétiques

Exercice n°4

1. Une propriété nous dit que pout tout entier p et k : $u_p = u_k + (p-k)r$.
   Dans notre cas, on prend $p = 0$, $k = 27$ et $r = -,04$.
   Ainsi : $u_0 = -8,7 + (0-27) \times (-0,4) = 2,1$.
2. $u_n = u_0 + nr = 2,1 - 0,4n$
3. La raison est négative. La suite (u_n) est donc décroissante sur $\mathbb{N}$.
4. A chaque fois, en enlève 0,4 à un terme pour trouver le suivant. Si on fait ça jusqu'à l'infini, on va se retrouver avec des termes extrêmement petit. On peut donc dire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ c'est $-\infty$.

Exercice n°5

1. On utilise la formule $u_p = u_k + (u_p - u_k)r$ en prenant $p = 2\ 000$ et $k = 1\ 000$.

   $u_{2\ 000} = u_{1\ 000} + (2\ 000 - 1\ 000)r$

   $2\ 036 = 2\ 026 + (2\ 000 - 1\ 000)r$

   $\dfrac{2\ 036 - 2\ 026}{2\ 000 - 1\ 000} = r$

   $r = 0,01$. La raison de cette suite est 0,01.

2. $u_n = u_0 + nr = 2\ 026 + 0,01n$.

3. La raison de cette suite est positive. La suite (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

4. A chaque fois, en ajoute 0,01 à un terme pour trouver le suivant. Si on fait ça jusqu'à l'infini, on va se retrouver avec des termes extrêmement petit. On peut donc dire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ c'est $+\infty$.

Exercice n°6

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison 6. Sa raison étant positive c'est une suite croissante sur $\mathbb{N}$. A chaque fois, en ajoute 6 à un terme pour trouver le suivant. Si on fait ça jusqu'à l'infini, on va se retrouver avec des termes extrêmement petit. On peut donc dire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ c'est $+\infty$.

2. $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n - u_n = 2n$. Le résultat dépend de n ce n'est donc pas une suite arithmétique.

3. $u_{n+1} - u_n = -3 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n - 3$.
   (u_n) est une suite arithmétique de raison -3. Sa raison étant négative c'est une suite décroissante sur $\mathbb{N}$. A chaque fois, en enlève 3 à un terme pour trouver le suivant. Si on fait ça jusqu'à l'infini, on va se retrouver avec des termes extrêmement petit. On peut donc dire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ c'est $-\infty$.

4. $u_0 = \dfrac{1}{3}$, $u_1 = \dfrac{2}{5}$, $u_2 = \dfrac{3}{7}$. Or $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$. Ce n'est donc pas une suite arithmétique.

Exercice n°7

1. Voici le programme complété :

```
def arithmetique(u0,r,n):
        U = u0 + n*r
    return(U)
```

2. On rentre u0 = 6,2 puis r = −0, 87 et enfin n = 500.
   Le programme nous retourne alors $u_{500} = -428,8$.

Exercice n°8

1. $$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10} = \frac{143}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad u_0 + \left(u_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_0 + 2 \times \frac{1}{3}\right) + ... + \left(u_0 + 10 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{143}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad 11u_0 + \frac{1}{3} \times (1 + 2 + ... + 10) = \frac{143}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad 11u_0 + \frac{1}{3} \times \frac{10 \times 11}{2} = \frac{143}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad 11u_0 + \frac{1}{3} \times 55 = \frac{143}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad 11u_0 + \frac{55}{3} = \frac{143}{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad 11u_0 = \frac{11}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

2. $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$

3. La raison de cette suite est positive. (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.
   A chaque fois, en ajoute $\frac{1}{3}$ à un terme pour trouver le suivant. Si on fait ça jusqu'à l'infini, on va se retrouver avec des termes extrêmement petit. On peut donc dire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ c'est $+\infty$.

Exercice n°9

1. $$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{25} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -450 + (-450 + r) + (-450 + 2r) + ... + (-450 + 24r) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -450 \times 25 + r(1 + 2 + 3 + ... + 24) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -11\ 250 + r\left(\frac{24 \times 25}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -11\ 250 + 300r = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 300r = 11\ 250$$
$$\Leftrightarrow \quad r = 37,5$$

2. $u_n = -450 + 37,5n$

3. La raison de cette suite est positive. (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.
A chaque fois, en ajoute $\frac{1}{3}$ à un terme pour trouver le suivant. Si on fait ça jusqu'à l'infini, on va se retrouver avec des termes extrêmement petit. On peut donc dire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ c'est $+\infty$.

> Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Exercice n°10

a. $1 + 2 + 3 + ... + 39 = \frac{39 \times 40}{2} = 780$

b. $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 24 = 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 12) = 2 \times \frac{12 \times 13}{2} = 156$

c. $100+101+102+...+140 = 100+(100+1)+(100+2)+...+(100+40) = 41\times 100+(1+2+...+40) = 4100+\frac{40 \times 41}{2}$
$= 4\ 920$

Exercice n°11

1. $1 + 2 + 3 + ... + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465$

2. $2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$

3. $501 + 502 + 503 + ... + 999 = 1 + 2 + 3 + ... + 999 - (1 + 2 + 3 + ... + 500) = \frac{999 \times 1000}{2} - \frac{500 \times 501}{2} = 374\ 250$

4. $$\begin{aligned} 501 + 503 + 505 + ... + 999 &= 501 + 502 + 503 + 504 + 505 + ... + 999 - (502 + 504 + 506 + ... + 998) \\ &= 374\ 250 - ((500 + 2) + (500 + 4) + (500 + 6) + ... + (500 + 498) \\ &= 374\ 250 - (249 \times 500 + 2 + 4 + 6 + ... + 498) \\ &= 374\ 250 - (249 \times 500 + 2(1 + 2 + 3 + ... + 249)) \\ &= 374\ 250 - \left(249 \times 500 + 2 \times \frac{249 \times 250}{2}\right) \\ &= 187\ 500 \end{aligned}$$

> Vérifier qu'une suite est géométrique

Exercice n°12

a. u_n est de la forme $u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 25$ et $q = \sqrt{3}$. C'est donc une suite géométrique.

b. $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 9$. Or $v_2 \div v_1 \neq v_1 \div v_0$. Ce n'est donc pas une suite géométrique.

c. Un terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre. C'est donc une suite géométrique.

Exercice n°13

a. $u_0 = 1$, $u_1 = 9$ et $u_2 = 81$. Or $u_2 \div u_1 = u_1 \div u_0 = 9$. Il semblerai que (u_n) soit une suite géométrique de raison 9. Vérifions le.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}} \\ &= \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}} \\ &= \frac{3^{2n} \times 3^2}{3^{2n}} \\ &= 3^2 \\ &= 9\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient entre deux termes consécutifs est égal à 9. (u_n) est donc une suite géométrique de raison 9 et de premier terme 1.

b. $-5 \times (-2)^{n+1} = -5 \times (-2)^n \times (-2) = 10 \times (-2)^n$. C'est donc une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 10$.

c. $u_n = 3 \times u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times u_n$. C'est donc une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

Exercice n°14

1. $u_0 = (-1)^{0+1} \times 6^{0+2} = -36$; $u_1 = (-1)^{1+1} \times 6^{1+2} = 216$ et $u_2 = u_0 = (-1)^{2+1} \times 6^{2+2} = -1\ 296$.

2. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{-1\ 296}{216} = -6$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{-1\ 296}{216} = -6$. La suite semble être géométrique de raison -6.

3. $$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(-1)^{n+1+1} \times 6^{n+1+2}}{(-1)^{n+1} \times 6^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \times (-1) \times 6^{n+1} \times 6}{(-1)^{n+1} \times 6^{n+2}} \\ &= -1 \times 6 \\ &= -6\end{aligned}$$

(u_n) est une suite géométrique de premier terme -36 et de raison -6.

> Etude des suites géométriques

Exercice n°15

1. On utilise la formule de la leçon $u_p = u_k \times q^{p-k}$ avec $p = 0$ et $k = 8$.
   $u_0 = \dfrac{125}{32} \times (-0,5)^{0-8} = 1\ 000$. Le premier terme de cette suite est $u_0 = 1\ 000$.

2. $u_n = 1\ 000\ \times(-0,5)^n$.

3. La raison de cette suite est négative. La suite n'est donc pas monotone sur $\mathbb{N}$.

4. Les termes sont positifs puis négatifs de façon alternée. La suite (u_n) n'a donc pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°16

1. On utilise la formule de la leçon $v_p = v_k \times q^{p-k}$ avec $p = 1$ et $k = 5$.
   $v_1 = \dfrac{-81}{32} \times 1,5^{1-5} = -\dfrac{1}{2}$. Le premier terme de cette suite est $v_1 = -\dfrac{1}{2}$.

2. $u_n = -\dfrac{1}{2} \times 1,5^n$.

3. Le premier terme de la suite est négatif et la raison est supérieure à 1. La suite (v_n) est donc décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice n°17

1. Voici le programme Python.

```
def geometrique(v0,q,n):
        v = v0*q**n
    return(v)
```

2. On rentre « geometrique(-1,-2,9) » et on trouve bien $u_9 = 512$.

Exercice n°18

1. $v_0 + v_1 + ... + v_{10} = 88\ 573$

$$\Leftrightarrow v_0 + v_0 \times \frac{1}{3} + v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 88\ 573$$

$$\Leftrightarrow v_0 \left(1 + \frac{1}{3} + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right) = 88\ 573$$

$$\Leftrightarrow v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{3}} = 88\ 573$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \frac{88\ 573}{\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = 59\ 049$$

2. $v_n = 59\ 049 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

> Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Exercice n°19

a. $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^9 = \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1\ 023$

b. $1 + 3 + 9 + 27 + ... + 3^{20} = \dfrac{1 - 3^{21}}{1 - 3} = 5\ 230\ 176\ 601$

c. $1 - 2 + 4 - 8 + ... + 1\ 024 = 1 + (-2) + (-2)^2 + ... + (-2)^{10} = \dfrac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = -341$

Exercice n°20

1. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - ... + \dfrac{1}{2^{10}} = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{683}{1\ 024}$

2. $3 \times +3 \times 1,05 + 3 \times 1,05^2 + ... + 3 \times 1,05^{19} = 3(1 + 1,05 + 1,05^2 + ... + 1,05^{19}) = 3 \times \dfrac{1 - 1,05^{20}}{1 - 1,05}$

3. $2 + 2 \times (-0,8) + 2 \times (-0,8^2) + ... + 2 \times (-0,8)^{19} = 2(1 + (-0,8) + ... + (-0,8)^{19}) = 2 \times \dfrac{1 - (-0,8)^{20}}{1 - (-0,8)}$

> Modéliser à l'aide des suites arithmétiques ou géométriques

Exercice n°21