

Exercices sur les graphes et calculs matriciels

> Modéliser à l'aide d'un graphe, d'une matrice

Exercice n°1

Jean-Kevin travaille beaucoup. Chaque année, il est susceptible de travailler à Abu Dhabi ou Bangkok.

- S'il travaille à Abu Dhabi, la probabilité qu'il y reste l'année suivante est de 0,7
- S'il travaille à Bangkok, la probabilité qu'il déménage à Abu Dhabi l'année suivante vaut 0,3.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Sachant qu'il travaille actuellement à Abu Dhabi, quelle est la probabilité qu'il y soit dans deux ans ?

Exercice n°2

Quand Jean-Kevin réussit son pénalty, il a deux chances sur trois de réussir le suivant. Mais s'il le rate, il n'a qu'une chance sur quatre de réussir le suivant.

1. Représenter cette situation par une chaîne de Markov.
2. Déterminer la matrice de transition associée.

Exercice n°3

Un essaim d'abeilles peut évoluer chaque année de trois manières qui s'excluent mutuellement. Il peut essaimer, produire du miel ou contracter une maladie. L'évolution suit les règles suivantes :

- s'il a essaimé l'année passée, il contracte une maladie l'année en cours avec une probabilité de 0,1 et il produit du miel avec une probabilité de 0,8 ;
- s'il a produit du miel l'année passée, il essaime avec une probabilité de 0,9 et contracte une maladie avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il a contracté une maladie l'année passée, il en contracte une nouvelle l'année en cours avec une probabilité de 0,03 et il produit du miel avec une probabilité 0,8.

La première année, un naturaliste observe que la ruche a essaimé.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit à nouveau en train d'essaimer lorsque le naturaliste reviendra trois années plus tard ?
2. Si on observe le développement de l'essaim sur une longue période, quelle proportion représentent les années où cet essaim a produit du miel ?

Exercice n°4

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».

Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

90% des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

- 15% des clients n'ayant pas le profil « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20% des clients ont le profil « consommateur bio ».

Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

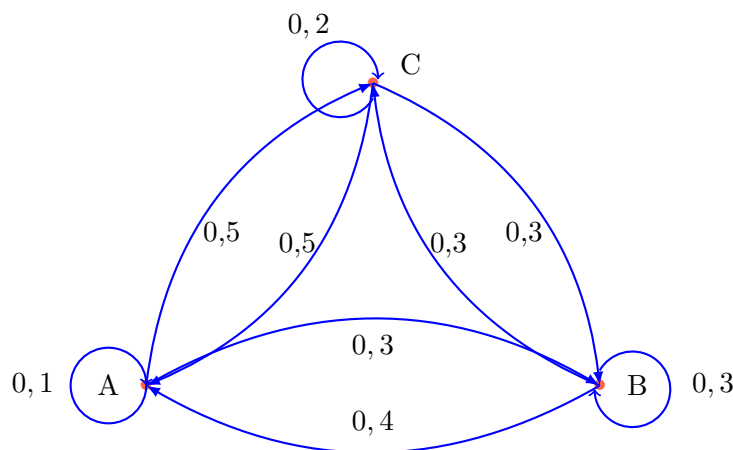
- b_n la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013 + n soit un « consommateur bio »
- c_n la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013 + n ne soit pas un « consommateur bio »
- P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} b_n & c_n \end{pmatrix}$ donnant l'état probabiliste lors de l'année 2013 + n .

- Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».
 - Donner P_0 ainsi que la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.
 - On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».

> Les chaînes de Markov

Exercice n°5

On considère une marche aléatoire représentée par le graphe probabiliste ci-dessous :



On note a_n , b_n et c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n .

- Déterminer une expression de chacun des termes a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
- On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant l'état à l'étape n .
Déterminer la matrice A de transition telle que $U_{n+1} = U_n \times A$.
- On note $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant l'état à l'étape n .
Déterminer la matrice B de transition telle que $V_{n+1} = B \times V_n$.

Exercice n°6

On considère deux gaz A et B qui en contact se transforment l'un en l'autre. Au départ, le mélange est composé de 20 l de gaz A et de 50 l de gaz B.

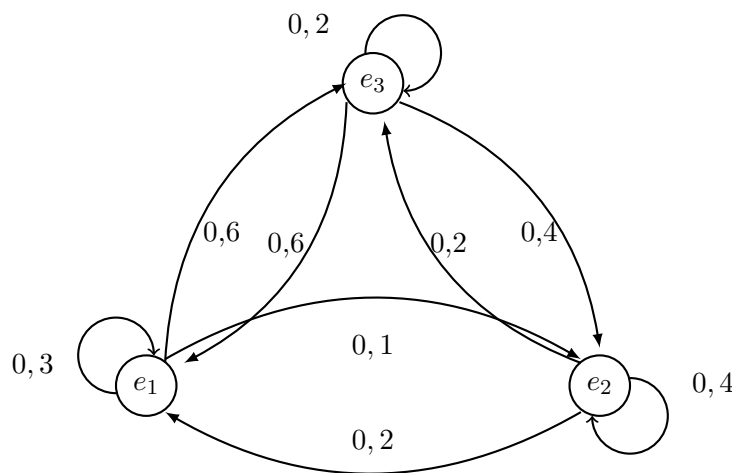
Un étude montre que chaque heure :

- 20% du gaz A se transforme en gaz B ;
- 60% du gaz B se transforme en gaz A.

1. Représenter la situation par un graphe pondéré.
2. Déterminer la matrice de transition associée.
3. Déterminer la composition du mélange au bout de 3 heures.

Exercice n°7

On considère une chaîne de Markov (X_n) dans l'espace des états $\{e_1; e_2; e_3\}$ dont les évolutions, étapes par étapes, des distributions sont représentées par le graphe pondéré ci-dessous :



1. Donner la matrice de transition A associée à ce graphe.
2. On note $\pi = (x \ y \ z)$ la matrice représentant la distribution invariante de la chaîne (X_n) .

On donne également $B = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & -0,8 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\pi \times B = (0 \ 0 \ 0)$.

(b) A l'aide de la calculatrice, déterminer le déterminant de la matrice B .

(c) Justifier l'équivalence entre les systèmes $\begin{cases} -0,7x + 0,2y + 0,6z = 0 \\ 0,1x - 0,6y + 0,2z = 0 \\ 0,6x + 0,4y - 0,8z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} -0,7x + 0,2y + 0,6z = 0 \\ 0,1x - 0,6y + 0,2z = 0 \\ 0,1x - 0,6y + 0,2z = 0 \end{cases}$

(d) Que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions de ce système ?

3. On donne $C = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 1 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\pi \times C = (0 \ 0 \ 1)$.

- (b) Montrer que $C \times \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & -1,3 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = I_3$.
- (c) En déduire les coefficients de la matrice π .

> Utiliser le calcul matriciel

Exercice n°8 On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que :
$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} &= -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

- On considère les matrices suivantes définies pour tout entier naturel n par $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n + B$.
- (a) Montrer que la matrice $I_2 - A$ est inversible. On donnera l'expression de la matrice $(I_2 - 1)^{-1}$.
(b) Déterminer la matrice X telle que $X = AX + B$.
(c) Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, déterminer les valeurs de leur limite.
- On considère la suite (V_n) de matrices colonnes définies pour tout entier naturel n par $V_n = X_n - X$. En déduire que pour tout entier naturel n on a $V_n = A^n \times V_0$.
- On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
(a) Montrer que P est inversible.
(b) On note D la matrice définie par $D = P^{-1} \times A \times P$. Donner une expression de D^n pour tout entier naturel n .
(c) En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n .
- Si $x_0 = 1$ et si $y_0 = 2$, que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

Exercice n°9 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

- Effectuer le calcul $A \times B$.
- Résoudre le système
$$\begin{cases} x + 2y - z &= 5 \\ 3x + 6y - 4z &= 13 \\ 2x + 5y - 3z &= 11 \end{cases}.$$

Exercice n°10

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n -ième année après 2013 et b_n pour l'opérateur B.

On a ainsi $a_0 = b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} &= 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n , on note enfin $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer U_1 .

(b) Vérifier que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = MU_n + P$.

2. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser sa matrice inverse.

(c) Déterminer la matrice U telle que $U = MU + P$.

3. Pour tout entier naturel n on pose $V_n = U_n - U$.

(a) Justifier que pour tout entier naturel n on a $V_{n+1} = M \times V_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n on a $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que pour tout entier naturel n on a $V^n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$.

(a) Pour tout entier naturel n , exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n) .

(b) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.