

Correction des exercices sur les probabilités conditionnelles

> Calculer des probabilités conditionnelles

Exercice n°1

1. $P(R \cap G) = \frac{1}{4}$
2. $P_G(R) = \frac{1}{3}$
3. $P_R(G) = \frac{1}{5}$
4. $P_{\bar{G}}(R) = \frac{1}{5}$

Exercice n°2

1. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}$.
2. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A) = P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,7 - 0,8 = 0,2$.

$$\text{Puis } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4} \text{ et } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$$

Exercice n°3

Notons A : « L'habitant possède un forfait » et B : « C'est un utilisateur régulier du bus ».

D'après l'énoncé, on a $P(A) = 0,25$ et $P_A(B) = 0,4$.

Ainsi, $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$.

La probabilité que l'utilisateur ait un abonnement et qu'il prennent régulièrement le bus est donc de 10%.

Exercice n°4

Notons C : « Le client prend un café » et D : « Le client prend un dessert ».

1. D'après l'énoncé, on a $P(C) = 0,8$, $P(D) = 0,4$.

Puisque les $\frac{3}{4}$ de ceux qui prennent un dessert prennent aussi un café, on a $P(D \cap C) = \frac{3}{4} \times 0,4 = 0,3$.

2. On sait que $P(C) = 0,8$ et que $P(C \cap D) = 0,3$. On a donc $P(C \cap \bar{D}) = 0,8 - 0,3 = 0,5$. En effet, parmi tous ceux qui prennent un café, on compte les 30% qui ont pris un dessert et les autres, qui n'en n'ont pas pris. Il reste donc 50% soit 0,5.

De plus : $P(\bar{D} \cap \bar{C}) = 0,6 - 0,5 = 0,1$. On compte les 60% qui n'ont pas pris de dessert et on enlève ceux qui ont pris un café. Il nous reste donc les personnes qui n'ont pris ni dessert ni café.

3. D'après la question précédente : $P(\bar{D} \cap C) = 0,5$.

$$\text{Puis } P_C(\bar{D}) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(C)} = \frac{0,5}{0,8} = 0,625$$

4. Il y a 60% des personnes qui n'ont pas pris de dessert dont 50% ont pris un café. La probabilité qu'une personne n'ait pas pris de dessert ni de café est de 10% soit $P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0,1$.

$$\text{Puis } P_{\overline{C}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{C} \cap \overline{D})}{P(\overline{C})} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

Exercice n°5

1. Nombre de personnes totale : $38 + 7 + 1 + 8 + 1 + 3 + 36 + 6 = 100$. Nombre de personnes du groupe O : $36 + 6 = 42$.
La probabilité qu'une personne soit du groupe O est donc de $\frac{42}{100}$ soit 42% (comme ça, de tête).
2. Nombre de personnes Rhésus + : $38 + 8 + 3 + 36 = 85$. La probabilité qu'il soit Rhésus + est donc de $\frac{85}{100}$.
3. Nombre de personnes du groupe AB : $3 + 1 = 4$. Nombre de personnes Rhésus + du groupe AB : 3.
La probabilité qu'il soit Rhésus + sachant qu'il est du groupe AB est donc de $\frac{3}{4}$.
4. Nombre de personnes Rhésus - : $7 + 1 + 1 + 6 = 15$.
Nombre de personnes du groupe O et Rhésus - : 6. La probabilité qu'il soit du groupe O sachant qu'il est Rhésus - est donc de $\frac{6}{15}$ soit $\frac{2}{5}$.

Exercice n°6

1. Nombre total de Pokemon dans la zone : $89 + 19 + 87 + 3 + 1 + 2 = 210$
Nombre total de shiny : $3 + 1 + 2 = 6$
La probabilité que Jean-Kevin tombe sur un shiny est donc de $\frac{6}{201}$ soit environ 3%.
2. Il n'y a qu'un seul Zigzaton shiny. La probabilité est donc de $\frac{1}{201}$ soit environ 0,5%.
3. Il y a 20 Zigzaton au total. Parmi ceux-ci, il n'y a qu'un seul shiny.
Ainsi : $P_M(S) = \frac{1}{20}$.
4. Nombre de Pokemon à la couleur normale : $89 + 19 + 87 = 195$.
Parmi ceux-ci, il y a 87 Chenipotte. Ainsi, $P_{\overline{S}}(C) = \frac{87}{195}$.

Exercice n°7

1. D'après l'énoncé, $P(V) = 0,02$, $P_V(T) = 0,99$ et $P_{\overline{V}}(T) = 0,97$.
2. $P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$. La probabilité qu'une personne soit contaminée et dispose d'un test positif est donc de 0,0198 soit 1,98%.
3. On compte les personnes contaminées ayant un test positif et celles non contaminées ayant un test positif.
Dans le premier cas, la probabilité est de 0,0198 (question précédente).
Pour le second cas : La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97. La probabilité qu'une telle personne ait un test positif est donc de 0,03.

Ainsi, $P(\overline{V} \cap T) = 0,0198 \times 0,03 = 0,0294$.

Puis : $0,198 + 0,0294 = 0,0492$.

$$4. P_T(V) = \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4 \approx 40\%.$$

$$5. P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{V})}{P(\overline{T})}.$$

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,0492 = 0,9508.$$

$$P(\overline{T} \cap \overline{V}) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(\overline{V}) = 0,98 \times 0,97 = 0,9506.$$

$$\text{Finalement : } P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{V})}{P(\overline{T})} = \frac{0,9506}{0,9508} \approx 0,9999.$$

Exercice n°8

1. Nombre total de livres : 200

Nombre de romans policiers : 150

La probabilité que Jean-Kevin choisisse un roman policier est donc de $\frac{150}{200}$ soit 0,75.

2. Nombre de romans policiers français : $150 \times 0,4 = 60$. La probabilité est donc de $\frac{60}{200}$ soit 0,3.

3. Nombre de romans de sciences fiction français : $50 \times 0,7 = 35$.

Nombre de romans français : $35 + 60 = 95$

La probabilité qu'il choisisse un roman français est donc de $\frac{95}{200}$ soit 0,475.

4. Notons F : « Le roman est français » et notons P : « Le roman est policier ».

$P_F(P) = \frac{P(F \cap P)}{P(F)} = \frac{0,3}{0,475} \approx 0,63$. La probabilité qu'il choisisse un roman policier sachant qu'il est français est donc d'environ 63%.

> Utiliser un arbre pondéré et la formule des probabilités totales

Exercice n°9

1. On note les événements suivants :

V_1 : « La première face obtenue est verte »

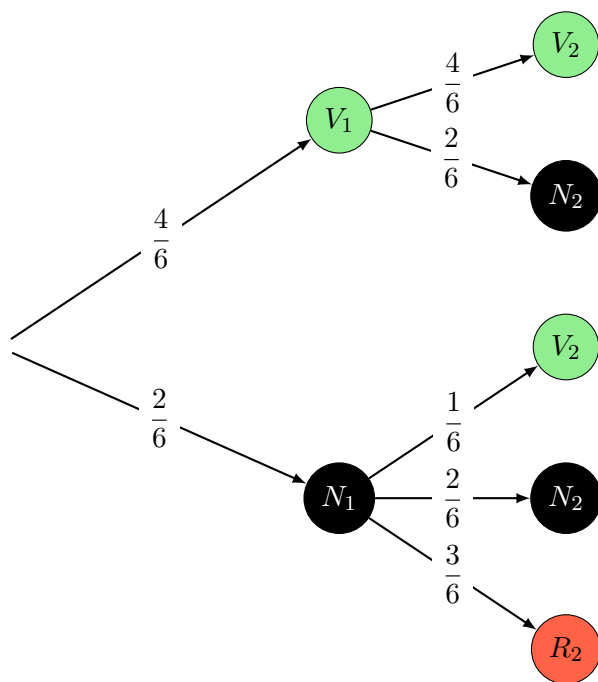
N_1 : « La première face obtenue est noire »

V_2 : « La deuxième face obtenue est verte »

N_2 : « La deuxième face obtenue est noire »

R_2 : « La deuxième face obtenue est rouge »

On obtient alors l'arbre pondéré suivant :



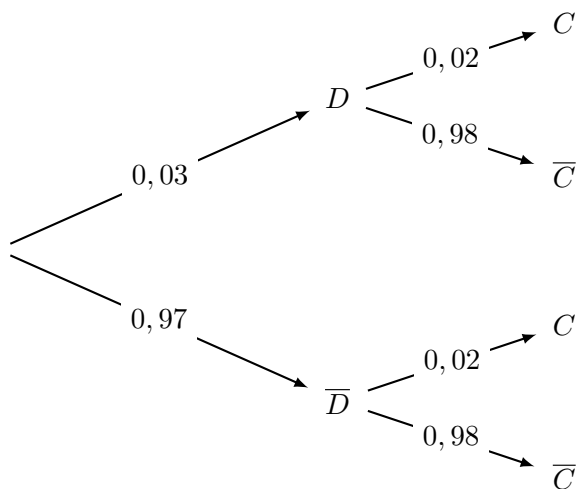
2. $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{6}$.

3. $P(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$.

4. $P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap V_2) = \frac{16}{36} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{18}{36}$

Exercice n°10

1. On obtient l'arbre suivant :



2. $P(D \cap C) = 0,03 \times 0,02 = 0,0006$.

3. $P(C) = P(D \cap C) + P(\overline{D} \cap C) = 0,0006 + 0,97 \times 0,02 = 0,02$.

4. $P(\overline{D} \cap \overline{C}) = 0,97 \times 0,98 = 0,9506$.

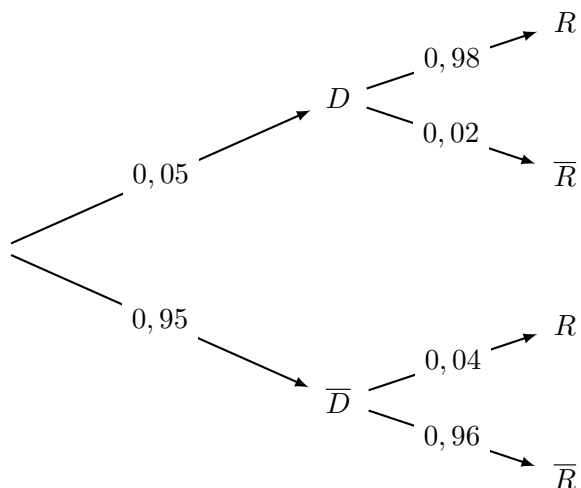
Exercice n°11

Notons les évènements suivants :

D : « La pièce est défectueuse »

R : « La pièce est rejetée »

Pour tout l'exercice, on s'aidera de l'arbre suivant :



1. $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R)$
 $= 0,05 \times 0,98 + 0,95 \times 0,04$
 $= 0,087.$
2. $P(\overline{D} \cap \overline{R}) = 0,95 \times 0,96 = 0,912.$
3. $P(D \cap \overline{R}) + P(\overline{D} \cap R)$
 $= 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,04$
 $= 0,039.$
4. $P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,04}{0,087} \approx 0,46.$
5. $P_{\overline{R}}(D) = \frac{P(\overline{R} \cap D)}{P(\overline{R})} = \frac{0,05 \times 0,02}{1 - 0,087} \approx 0,001.$

> Évènements indépendants

Exercice n°12

1. Puisque R et S sont indépendants : $P(R \cap S) = P(R) \times P(S) = 0,1 \times 0,05 = 0,005.$
2. Il sera à l'heure s'il entend son réveil sonner et si son scooter ne tombe pas en panne. Autrement dit, si les évènements $\overline{R}$ et $\overline{S}$ se produisent. Puisque R et S sont indépendants alors $\overline{R}$ et $\overline{S}$ aussi.
Ainsi : $P(\overline{R} \cap \overline{S}) = P(\overline{R}) \times P(\overline{S}) = 0,9 \times 0,95 = 0,855.$

Exercice n°13

1. Pour la somme des deux dés, on va s'aider du tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

D'après le tableau, $P(S) = \frac{18}{36}$. On a également $P(V) = \frac{3}{6}$.

Toujours d'après le tableau, la probabilité que le numéro vert soit pair et que la somme soit paire est de $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

$$P(S) \times P(V) = \frac{18}{36} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}.$$

Puisque $P(S \cap V) = P(S) \times P(V)$ alors S et V sont indépendants.

2. $P(R) = \frac{3}{6}$ et $P(S \cap R) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Or $P(S) \times P(R) = \frac{18}{36} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} = P(S \cap R)$. Là encore, S et R sont indépendants.

3. Toujours d'après le tableau, $P(V \cap R) = \frac{3}{36}$. On rappelle aussi que $P(S) = \frac{18}{36}$.

D'après le tableau, $P(V \cap S \cap R) = \frac{3}{36}$. Cette fois ci, $P(S \cap V \cap R) \neq P(S) \times P(V \cap R)$ donc ces deux évènements ne sont pas indépendants.

Exercice n°14

1. $P(A) = \frac{4}{32}$ et $P(B) = \frac{8}{32}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

Or $P(A) \times P(B) = \frac{4}{32} \times \frac{8}{32} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$. Les évènements A et B sont donc indépendants.

2. $P(A) = \frac{16}{32}$, $P(B) = \frac{8}{32}$ et $P(A \cap B) = \frac{8}{32}$. Les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Or $P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$. Les évènements A et B ne sont pas indépendants.