Correction : représentations cartésienne et paramétrique

> Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

Exercice n°1

a. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 4+2t \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

b. $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3-t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

Exercice n°2

a. Un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$. $\mathrm{A}(1\,;\,2\,;\,0)$ appartient à cette droite. En prenant $t=1$, on trouve aussi le point $\mathrm{B}(2\,;\,2\,;\,3)$

b. Un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. $\mathrm{A}(-1\,;\,1\,;\,4)$ appartient à cette droite. En prenant $u=1$, on trouve aussi le point $\mathrm{B}(1\,;\,0\,;\,7)$

Exercice n°3

1. En remplaçant x par 3, y par 0 et z par 5, on obtient le système $\left\{\begin{array}{lll} 3 & = & 1+2t \\ 0 & = & -1+t \\ 5 & = & 2+3t \end{array}\right.$ ce qui donne $t=1$ pour les trois lignes du système. Donc A appartient bien à (d).

   En remplaçant x par 0, y par $-1,5$ et z par 0,5 on obtient le système $\left\{\begin{array}{rll} 0 & = & 1+2t \\ -1,5 & = & -1+t \\ 0,5 & = & 2+3t \end{array}\right.$ ce qui donne $t=-0,5$ pour les trois lignes du système. Donc B appartient bien à (d).

   En remplaçant x par 1, y par 0 et z par 2, on obtient le système $\left\{\begin{array}{lll} 1 & = & 1+2t \\ 0 & = & -1+t \\ 2 & = & 2+3t \end{array}\right.$ ce qui donne $t=0$ pour la première ligne, $t=1$ pour la deuxième et $t=0$ pour la troisième. Il n'existe donc pas un unique réel t tel que le point C appartienne à la droite (d).

2. Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. Sa parallèle aura donc un vecteur directeur colinéaire à $\vec{u}$. On peut même prendre $\vec{u}$ comme vecteur directeur de cette parallèle. Puisque cette parallèle passe par $\mathrm{D}(3\,;\,1\,;\,-1)$, une représentation paramétrique de la parallèle à (d) passant par D est $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3+2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right.$.

Exercice n°4

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$.

   Il n'existe pas d'unique réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires : ils définissent bien un plan.

2. M appartient à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ s'écrit comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a alors $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}$ où t et u sont deux réels.
   Puisque A$(2\,;\,1\,;\,0)$ appartient à (ABC), on obtient le système donné.

3. Pour D : on remplace x par 1, y par 2 et z par 3. Grâce à la dernière ligne du système, on trouve $t = 2$. Grâce à la deuxième ligne, on trouve $u = -1$. En remplaçant alors t er u par ces valeurs dans la première ligne, on trouve bien $1 = 1$. Donc D appartient à (ABC).

   Pour E : on remplace x par 7, y par 0 et z par 6. Grâce à la dernière ligne du système, on trouve $t = 2$. Grâce à la deuxième ligne, on trouve $u = 1$. En remplaçant alors t er u par ces valeurs dans la première ligne, on trouve bien $7 = 7$. Donc E appartient bien à (ABC).

   Pour E : on remplace x par 1, y par 2 et z par 3. Grâce à la dernière ligne du système, on trouve $t = 1$. Grâce à la deuxième ligne, on trouve $u = -1$. En remplaçant alors t er u par ces valeurs dans la première ligne, on trouve $1 = 0$. Donc F n'appartient pas à (ABC).

   Pour E : on remplace x par 6, y par 0 et z par 3. Grâce à la dernière ligne du système, on trouve $t = 1$. Grâce à la deuxième ligne, on trouve $u = 1$. En remplaçant alors t er u par ces valeurs dans la première ligne, on trouve bien $6 = 6$. Donc G appartient bien à (ABC).

Exercice n°5

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Puisque A appartient à (AB), une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& 2+t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

2. Un vecteur directeur à Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et Δ ne sont pas parallèles.
   $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 1\times 1 + 2\times 2 + 1\times 1 \neq 0$. Elles ne sont pas non plus orthogonales.
   Elles sont donc sécantes en un point : notons-le C. Ce point appartient aux deux droites : ses coordonnées vérifient donc les deux systèmes. On a alors : $\left\{\begin{array}{rcl} 1-s &=& -4+t \\ 2+2s &=& 4+2t \\ 1+s &=& 2+t \end{array}\right.$.
   On trouve alors $t = -3$ et $s = -2$. En remplaçant dans les deux systèmes ces deux valeurs, on trouve $x = -7$, $y = -1$ et $z = -1$.

> Equation cartésienne d'un plan

Exercice n°6

1. Une équation cartésienne de ce plan est $4x - 3y + z + d = 0$. Pour trouver la valeur de d, on remplace x, y et z par les coordonnées du point A.
   On obtient alors $4 \times 0 - 3 \times 2 + (-3) + d = 0$ ce qui est équivalent à $d = 9$.
   Une équation cartésienne de ce plan est donc $4x - 3y + z + 9 = 0$.

2. Une équation cartésienne de ce plan est $-x - y + 5z + d = 0$. Pour trouver la valeur de d, on remplace x, y et z par les coordonnées du point B.
   On obtient alors $-2 - 4 + 5 \times 1 + d = 0$ ce qui est équivalent à $d = 1$.
   Une équation cartésienne de ce plan est donc $-x - y + 5z + 1 = 0$.

Exercice n°7

1. $\vec{n}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

2. On fixe x à 0 et y à 1 (par exemple). On trouve alors $\frac{1}{4} - z = 0$ soit $z = \frac{1}{4}$. Le point de coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\frac{1}{4}\right)$ appartient à $\mathcal{P}$.

Exercice n°8

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$. On obtient le système $\left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 2\beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma & = & 0 \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 2\beta + 2(-\alpha + \beta) & = & 0 \\ \gamma & = & -\alpha + \beta \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & \frac{3}{4}\alpha \\ \gamma & = & -\alpha + \beta \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & \frac{3}{4}\alpha \\ \gamma & = & -\frac{1}{4}\alpha \end{array}\right..$$

En prenant arbitrairement $\alpha = 4$, on trouve $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de (ABC) est donc $4x + 3y - z + d = 0$.

Puisque A appartient à (ABC), on obtient $4 \times 1 + 3 \times (-1) - (-1) + d = 0$ ce qui donne $d = -2$. Une équation cartésienne de (ABC) est donc $4x + 3y - z - 2 = 0$.

Exercice n°9

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}.\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2 &\Leftrightarrow 1\times(x-1)+2(y-2)-(z-3)=2\\ &\Leftrightarrow x+2y-z-4=0.\end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation cartésienne du plan de vecteur normal $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice n°10

1. $2\times3-3\times0+0-6=0$. $\mathcal{P}$ coupe l'axe Ox en A$(3\,;\,0\,;\,0)$.
   $2\times0-3\times2+0-6=0$. $\mathcal{P}$ coupe l'axe Oy en B$(0\,;\,-2\,;\,0)$.
   $2\times0-3\times0+6-6=0$. $\mathcal{P}$ coupe l'axe Oz en C$(0\,;\,0\,;\,6)$.

2. On a $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{m}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

   Donc $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est bien normal à $\mathcal{P}$.

3. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{Q}$ puisque ce sont deux plans parallèles. Une équation, cartésienne de $\mathcal{Q}$ est donc $2x-3y+z+d=0$. Puisque D appartient à $\mathcal{Q}$ on a $2\times5-3\times(-3)+1+d=0$ ce qui donne $d=-20$. Une équation de $\mathcal{Q}$ est $2x-3y+z-20=0$.

4. On remplace x, y et z par les coordonnées des points et on regarde si elles vérifient l'équation du plan $\mathcal{R}$.
   $3+0+0-3=0$. Donc A appartient bien à $\mathcal{R}$.
   $5+(-3)+1-3=0$. Donc D appartient bien à $\mathcal{R}$.

5. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{R}$.
   Si $\vec{n}$ appartient à $\mathcal{P}$, alors il est orthogonal à tout vecteur normal de $\mathcal{P}$.
   $\vec{n}.\vec{m}=1\times2+1\times(-3)+1\times1=0$. Donc $\vec{n}$ appartient bien à $\mathcal{P}$.

6. L'intersection de deux plans est une droite. Ici, cette droite a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. D'après les questions n°1 et n °4, A appartient à la fois à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

   Ainsi, l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3+t\\y&=&t\\z&=&t\end{array}\right.$ où $t\in\mathbb{R}$.

> Résolution de problèmes

Exercice n°11

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

   (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passe par H. Un vecteur directeur de (AH) est donc normal à $\mathcal{P}$.

   Donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur à (AH) de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -7+t \\ y & = & 2t \\ z & = & 4+t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

   En remplaçant les expressions de x, y et t dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on obtient : $-7+t+2\times 2t-(4+t)-1=0$ ce qui donne $t=2$.

   Les coordonnées de H sont donc $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -7+2=-5 \\ y & = & 2\times 2=4 \\ z & = & 4+2=6 \end{array}\right.$.

2. La distance de A à $\mathcal{P}$ est la distance AH.

   $\text{AH} = \sqrt{(-5-(-7))^2+(4-0)^2+(6-4)^2} = 2\sqrt{6}$.

Exercice n°12

1. Notons ce point H. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 2-t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

   Puisque H appartient à (AB), ses coordonnées vérifient ce système. On a donc $\text{H}(1-2t\,;\,2t\,;\,2-t)$ et donc $\overrightarrow{\text{CH}}\begin{pmatrix}1-2t\\2t-1\\4-t\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{\text{CH}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ étant orthogonaux on a

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{CH}}.\overrightarrow{\text{AB}}=0 &\Leftrightarrow (1-2t)\times(-2)+(2t-1)\times 2+(4-t)\times(-1)=0\\ &\Leftrightarrow t=\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

   On a donc $\text{H}\left(-\frac{7}{9}\,;\,\frac{16}{9}\,;\,\frac{10}{9}\right)$.

2. La distance de C à (AB) est égale à la distance CH.

   $\text{CH} = \sqrt{\left(-\frac{7}{9}-0\right)^2+\left(\frac{16}{9}-1\right)^2+\left(\frac{10}{9}-(-2)\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$.

Exercice n°13

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de (AB) est donc $\begin{cases} x &= 1-2t \\ y &= 2 \\ z &= -3+3t \end{cases}$.

   Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -2\times 2 + 0\times(-1) + 3\times 3 \neq 0$.

   $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont donc pas orthogonaux donc (AB) et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles : ils sont donc sécants en un point.

2. Notons $M(x\,;\,y\,;\,z)$ ce point d'intersection. M appartient à (AB) et $\mathcal{P}$. Ses coordonnées vérifient donc le système de (AB) et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
   Dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on va remplacer x, y et z par les expressions données par la représentation paramétrique de (AB). On obtient alors :

   $2\times(1-2t) - 2 + 3\times(-3+3t) - 2 = 0$ ce qui nous donne $t = \dfrac{11}{5}$.

   Finalement, on trouve $\begin{cases} x &= 1-2\times\dfrac{11}{5} = -\dfrac{17}{5} \\ y &= 2 \\ z &= -3+3\times\dfrac{11}{5} = \dfrac{18}{5} \end{cases}$.

Exercice n°14

Partie 1

1. $P(6\,;\,0\,;\,0)$ et $Q(0\,;\,0\,;\,6)$.

2. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$.
   Ainsi : $\overrightarrow{PQ}.\vec{n} = -6\times 1 + 0\times 5 + 6\times 1 = 0$. On montre de même que $\overrightarrow{PR}.\vec{n} = 0$.
   $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (PQR) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

3. Une équation cartésienne de (PQR) est $x-5y+z+d=0$. Puisque $P(6\,;\,0\,;\,0)$ appartient à (PQR), en remplaçant ses coordonnées dans cette équation on trouve $d=-6$.
   Une équation cartésienne de (PQR) est donc $x-5y+z-6=0$.

Partie 2

1. Ω est le milieu de [EC]. Or $E(0\,;\,0\,;\,8)$ et $C(8\,;\,8\,;\,0)$ donc $\Omega\left(\dfrac{8+0}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\right)$ donc $\Omega(4\,;\,4\,;\,4)$.

2. $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

   Une représentation paramétrique de cette droite est donc $\begin{cases} x &= 4+t \\ y &= 4-5t \\ z &= 4+t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

3. Dans l'équation cartésienne de (PQR), on remplace x, y et z par leur expression de la représentation paramétrique de (d).

On obtient alors $4+t-5\times(4-5t)+4+t-6=0$ ce qui donne $t=\dfrac{2}{3}$. Puis, en remplaçant t par $\dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de (d) on obtient bien les coordonnées de L.

4. $\mathrm{L}\Omega=\sqrt{\left(4-\dfrac{14}{3}\right)^2+\left(4-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(4-\dfrac{14}{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$

Exercice n°15

1. $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FG}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

2. Il n'existe pas d'unique réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{FG}}$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires : les points E, F et G ne sont donc pas alignés.

3. $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ est un vecteur directeur de la droite (FG). Cette droite passe par F. Une représentation paramétrique de (FG) est donc $\begin{cases}x&=&-1+4t\\y&=&2\\z&=&1-4t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

4. Si H est le projeté orthogonal de E sur (FG), il appartient à (FG).
On a donc $2=-1+4t$ ce qui donne $t=\dfrac{4}{3}$. En remplaçant t par $\dfrac{4}{3}$ dans les deux autres lignes du système, on trouve $y=2$ et $z=-2$. Donc H appartient bien à (FG).
Il faut également que les vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ soient orthogonaux :
$\overrightarrow{\mathrm{FG}}.\overrightarrow{\mathrm{EH}}=4\times(-1)+0\times4+(-4)\times(-1)=0$.
Donc $\mathrm{H}(2\,;\,2\,;\,-2)$ est bien le projeté orthogonal de E sur (FG).

5. $\mathrm{FG}=\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$ et $\mathrm{EH}=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$.
Puis $\mathcal{A}=\dfrac{\mathrm{EH}\times\mathrm{FG}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=12$.
L'aire de EFG est bien de 12 cm^2.

6. $\overrightarrow{\mathrm{EF}}.\vec{n}=-4\times2+4\times1+2\times2=0$. On montre de même que $\overrightarrow{\mathrm{FG}}.\vec{n}=0$.
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (EFG) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (EFG).

7. Une équation de (EFG) est de la forme $2x+y+2z+d=0$. Puisque E appartient à ce plan : $2\times3-2+2\times(-1)+d=0$ ce qui donne $d=-2$.
Une équation cartésienne de (EFG) est donc $2x+y+2z-2=0$.

8. Puisque cette droite est orthogonal à (EFG), un vecteur directeur de cette droite est normal à (EFG). Puisqu'elle passe par D, une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases}x&=&3+2k\\y&=&1+k\\z&=&5+2k\end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$.

9. K est le point d'intersection de (d) et de (EFG). Ses coordonnées vérifient donc le système de (d) et l'équation cartésienne de (EFG).
Dans l'équation cartésienne de (EFG), on remplace x, y et z par leur expression dans le système de (d).

On obtient ainsi : $6 + 4k + 1 + k + 10 + 4k - 2 = 0$ ce qui donne $k = -\frac{5}{3}$.

Puis : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3 + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ y & = & 1 + \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{2}{3} \\ z & = & 5 + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \end{array}\right.$.

10. Le volume d'un tétraèdre est $\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

    L'aire de la base a été calculée plus tôt : 12 cm^2. La hauteur est la longueur DK.

    $\text{DK} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 5\right)^2} = 5$.

    Donc $\mathcal{V} = \frac{12 \times 5}{3} = 20$.

    Le volume du tétraèdre est de 20 cm^3.