Méthode des rectangles

Méthode des rectangles

Théorème

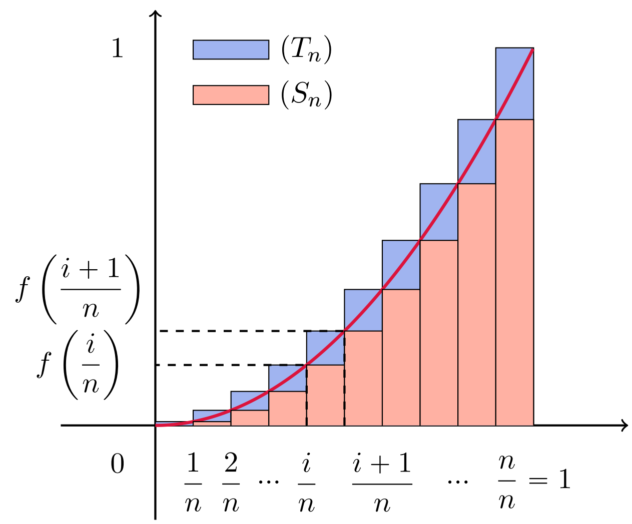
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de $\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel non nul.

On divise l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n parties égales.
On détermine ensuite les valeurs maximales et minimales de f sur chacun des intervalles

$$\left[a+\frac{(b-a)i}{n}\,;\,a+\frac{(b-a)(i+1)}{n}\right] \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

L'aire sous la courbe représentative de f est alors encadrée par deux suites (S_n) et (T_n) qui correspondent à l'aire des rectangles inférieurs et supérieurs.

(S_n) et (T_n) convergent alors vers une même limite qui est l'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$.



Exercice n°1

1. Ecrire un programme Python qui permet de donner une approximation de $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ en fonction du nombre de rectangles n voulus.
2. Tester ce programme pour plusieurs valeurs de n.
3. Modifier ce programme pour donner une approximation de l'aire sous la courbe représentative de la fonction exponentielle située entre 0 et 1.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Programme Python :

```
def f(x):
  return x**2
def A(n) :
  s=0 ; t=0
  for i in range(n):
    s=s+1/n*f ( i/n)
    t=t+1/n*f (( i+1)/n)
  return s,t
```

2. Pour print(A(100)), on trouve $0,32835 \leqslant \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \leqslant 0,33835$.

   Pour print(A(10 000)), on trouve $0,33328 \leqslant \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \leqslant 0,3338$.

3. Programme Python :

```
import math
def f(x):
  return math.exp(x)
def A(n):
  s=0
  t=0
  for i in range(n):
    s=s+1/n*f( i/n)
    t=t+1/n*f ((i+1)/n)
  return s,t
print(A(100))
```

   Le logiciel nous renvoie (1.7097047383081225, 1.7268875565927126).