Correction des exercices sur les congruences

> Division euclidienne, multiples et diviseurs

Exercice n°1

1. $-31 = -8 \times 4 + 1$ (le reste doit être compris entre 0 et 3).
2. $-19 = -5 \times 4 + 1$ (le reste doit être compris entre 0 et 4).
3. $-5000 = 17 \times (-295) + 15$.

Exercice n°2

1. On utilise un raisonnement par l'absurde.
   Supposons qu'il existe un entier relatif n tel que $6n + 5$ soit divisible par 5.
   Il existe alors un entier relatif k tel que $6n + 5 = 3k$. On obtient alors $5 = 3(k - 2n)$.
   Cela implique que 5 est un multiple de 3, ce qui n'est pas vrai. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $6n + 5$ n'est pas divisible par 3.

2. Si $2n + 5$ divise $n - 1$, par combinaison linéaire, $2n + 5$ divise $-2(n - 1) + 2n + 5$ soit $2n + 5$ divise 7. (on fabrique une combinaison linéaire de $n - 1$ et de $2n + 5$ dont le résultat ne dépend plus de n).
   Les diviseurs de 7 sont -7, -1, 7 et 1.
   On a donc 4 possibilités : $2n + 5 = -7$ et donc $n = -6$.
   Ou alors $2n + 5 = 7$ et donc $n = 1$, ou bien $2n + 5 = -1$ et donc $n = -3$ ou encore $2n + 5 = 1$ et donc $n = -2$.

   Vérifions :
   Si $n = -6$ alors $2n + 5 = -7$ et $n - 1 = -7$. Or $-7 | -7$ donc $n = -6$ est bien solution.
   Si $n = 1$ alors $2n + 5 = 7$ et $n - 1 = 0$. Or $7 | 0$ donc -1 est bien solution.
   Si $n = -3$ alors $2n + 5 = -1$ et $n - 1 = -4$. Or $-1 | -4$ donc -3 est bien solution.
   Si $n = -2$ alors $2n + 5 = 1$ et $n - 1 = -3$. Or $1 | -3$ donc -2 est bien solution.

Exercice n°3

$5n + 11 = 2(2n + 3) + n + 5$.
Le quotient est donc 2 et le reste est $n + 5$. Il faut cependant que $0 \leqslant n + 5 < 2n + 3$, c'est à dire que $n \geqslant 3$.
Regardons pour les valeurs entières de n de 0 à 2.

n	$5n + 11$	$2n + 3$	quotient	reste
0	11	3	3	2
1	16	5	3	1
2	21	7	3	0

Exercice n°4

1. Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \{-2\}$ une solution.

   Le nombre $\dfrac{2n-29}{n+2}$ est un entier relatif si et seulement si $n+2$ divise $2n-29$.
   Puisque $n+2$ divise aussi $2(n+2)$, il faut que $n+2$ divise $2(n+2)-(2n-29)=33$.

2. Les seuls diviseurs de 33 sont -1, -33, 1, 3, -3, 11, -11 et 33. Ces valeurs sont les seuls possibles pour $n+2$ donc les valeurs possibles de n sont -3, -35, -1, 1, -5, 9, -13 et 31.

3. Il faut donc maintenant tester toutes ces valeurs dans le quotient $\dfrac{2n-29}{n+2}$ et vérifier que les résultats sont des entiers relatifs.
   C'est le cas.

Exercice n°5

1. $100 = 33 \times 3 + 1$. Le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3 est 1.

2. **Initialisation**

   Pour $n=0$, $10^0 = 1$ et le reste de la division euclidienne de 1 par 3 est bien 1.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, la propriété soit vraie.
   Il existe donc un entier naturel k tel que $10^n = 3k+1$.
   $$\begin{array}{ll} & 10^n \times 10 = (3k+1) \times 10 \\ \Leftrightarrow & 10^{n+1} = 10k \times 3 + 10 \\ \Leftrightarrow & 10^{n+1} = 10k \times 3 + 9 + 1 \\ \Leftrightarrow & 10^{n+1} = 3(10k+3) + 1. \end{array}$$
   On vient de montrer que le reste de 10^{n+1} dans la division euclidienne par 3 est 1. La proposition est donc héréditaire.

   Conclusion

   La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

3. D'après la question précédente, il existe un entier naturel k tel que $10^n = 3k+1$.
   $$\begin{array}{ll} \Leftrightarrow & 4 \times 10^n = 4(3k+1) \\ \Leftrightarrow & 4 \times 10^n = 12k + 4 \\ \Leftrightarrow & 4 \times 10^n - 1 = 12k + 4 - 1 \\ \Leftrightarrow & 4 \times 10^n - 1 = 3(4k+1). \end{array}$$

   L'entier $4 \times 10^n - 1$ est bien un multiple de 3.

> Notion de congruence

Exercice n°6

a. $15 - 27 = -12$ qui est un multiple de 3 dans $\mathbb{Z}$. Donc $15 \equiv 27\ (3)$.

b. $17 - 11 = 6$ qui n'est pas un multiple de 4. La relation est donc fausse.

c. $37 = 9 \times 4 + 1$. Ainsi, $37 \equiv 1\ (4)$ et $37^4 \equiv 1^4 \equiv 1\ (4)$.

Exercice n°7

1. $5^6 \equiv (5^2)^3 \equiv 25^3 = (3 \times 7 + 4)^3 \equiv 4^3 \equiv 64\ (7)$
   Or $64 = 9 \times 7 + 1$ donc $5^6 \equiv 1\ (7)$.

2. $5^{6p} = (5^6)^p \equiv 1^p \equiv 1\ (p)$.

3. $33^{38} = (4 \times 7 + 5)^{36+2} \equiv 5^{36} \times 5^2 \equiv 1 \times 25 \equiv (3 \times 7 + 4) \equiv 4\ (7)$.

4. $2^{437} \equiv 2^{3\times145+2} \equiv (2^3)^{145} \times 2^2 \equiv 1^{145} \times 4 \equiv 4\ (7)$.

Exercice n°8

1. $2009^2 \equiv (125 \times 16 + 9)^2 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 5 \times 16 + 1 \equiv 1\ (16)$.

2. $2009^{8001} \equiv 2009^{2\times4000+1} \equiv 2009^{2\times4000} \times 2009 \equiv 1^{4000} \times 2009 \equiv 2009\ (16)$.

Exercice n°9

1. $100 = 9 \times 11 + 1$. Donc $100 \equiv 1\ (11)$.

2. $100^4 \equiv 100^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (11)$.

3. On a $10 - (-1) = 11$. On a donc $10 \equiv -1\ (11)$.
   $10^3 \equiv -1 \times (-1) \times (-1) \equiv -1\ (11)$ et de même, $10^5 \equiv -5\ (11)$.

4. $3729 \equiv 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \equiv 3 \times (-1) + 7 \times 1 + 2 \times (-1) + 9 \equiv 0\ (11)$.
   Donc 3 729 est bien divisible par 11.

5. $9240 \equiv 9 \times 1000 + 2 \times 100 + 4 \times 10 \equiv 9 \times (-1) + 2 \times 1 + 4 \times (-1) \equiv -11 \equiv 0\ (11)$.
   Donc 9 240 est bien divisible par 11.

6. En décomposant de la même façon, on montre que $197\ 277 \equiv 3\ (11)$ et donc n'est pas un multiple de 11.

Exercice n°10

1. $8 \times 125 = 1\ 000$. Donc 1 000 est bien divisible par 8.

2. $A = 8387592 \times 1000 + 115$.
   Donc $A \equiv 8387592 \times 1000 + 115 \equiv 115 \equiv 14 \times 8 + 3 \equiv 3\ (8)$.

3. $B = 9276312 \times 1000 + 516$.
   Donc $B \equiv 9276312 \times 1000 + 516 \equiv 516 \equiv 64 \times 8 + 4 \equiv 4\ (8)$.

4. $A + B \equiv 3 + 4 \equiv 7\ (8)$ et $A \times B \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 4\ (8)$.

Exercice n°11

1. $$\begin{aligned} &6 + x \equiv 5\ (3) \\ &6 + x - 6 \equiv 5 - 6\ (3) \\ &x \equiv -1\ (3) \\ &x \equiv 2\ (3). \end{aligned}$$

   Les entiers x solutions sont donc de la forme $2 + 3k$ où k est un entier relatif.

2. Cela revient à $3x \equiv 1\ (4)$.
   x modulo 4 est égal à 0 ; 1 ; 2 ou 3.
   Donc $3x$ modulo 4 est égal à 0 ; 3 ; 2 ou 1.

   Donc $3 \times 3 \equiv 1\ (4)$. Ainsi, $x \equiv 3\ (4)$.
   Les entier x solutions sont donc de la forme $3 + 4k$ avec k un entier relatif.

Exercice n°12

1. $(n+3)^4 = n^4 + 12n^3 + 54n^2 + 108n + 81$, en utilisant la formule du binôme de Newton.

2. $12 \equiv 0\ (4)$, $54 \equiv 13 \times 4 + 2 \equiv 2\ (4)$, $108 \equiv 4 \times 27 \equiv 0\ (4)$ et $81 \equiv 20 \times 4 + 1 \equiv 1\ (4)$.
   Ainsi, $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1\ (4)$.

3. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 4 :

r	0	1	2	3
$r^4 + 2r^2 + 1$	1	4	25	100
$(n+3)^4$ modulo 4	1	0	1	0

   Ainsi, $(n+3)^4$ est divisible par 4 si et seulement si n est un nombre impair.

Exercice n°13

1. $1305 = 45 \times 29$ donc $1305 \equiv 0\ (29)$.
   Ainsi, $1305^{1305} \equiv 0\ (29)$.

   $900 = 31 \times 29 + 1$ donc $900 \equiv 1\ (29)$.
   Donc $900^{900} \equiv 1^{900} \equiv 1\ (29)$.

   Par somme, on a $1305^{1305} + 900^{900} \equiv 1\ (29)$.
   Cela signifie que A n'est pas divisible par 29.

2. $27 = 3 \times 7 + 6$ donc $27 \equiv 6\ (7)$.
   Or $6 \equiv -1\ (7)$ donc $27 \equiv -1\ (7)$.
   Puis $27^{2012} \equiv (-1)^{2012} \equiv 1\ (7)$.
   Le reste de la division euclidienne de 27^{2012} par 7 est 1.

3. $1000 = 27 \times 37 + 1$. Le reste vaut 1.

4. $10^3 \equiv 1\ (37)$.
   Donc $10^{3n} \equiv 1\ (37)$.

5. $10^{10} \equiv 10^9 \times 10 \equiv (10^3)^3 \times 10 \equiv 1 \times 10 \equiv 10\ (37)$.
   De la même façon, on montre que $10^{20} \equiv 100\ (37)$.
   Enfin, $10^{30} \equiv (10^3)^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1\ (37)$.

   Finalement, $N \equiv 10 + 100 + 1 \equiv 111 \equiv 3 \times 37 \equiv 0\ (37)$.

Exercice n°14

1. Les restes possibles sont les entiers 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

2. En multipliant ces restes par 3, on obtient ainsi les nombres 0 ; 3 ; 6 ; 2 ; 5 ; 1 et 4.

3. Ainsi, $3x \equiv 5\ (7) \Leftrightarrow x \equiv 4\ (7)$.
   Les solutions sont donc les entiers de la forme $4 + 7k$ où k est un entier relatif.