Exercices sur le sommes de variables aléatoires

> Somme de variables aléatoires

Exercice n°1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-contre. On a également $E(Y) = 2,5$ et $V(Y) = 1,2$.

x_i	0	3
$P(X = x_i)$	0,4	0,6

1. Déterminer $E(X + Y)$.
2. Déterminer $E(3Y)$.
3. Déterminer $V(X + Y)$.

Exercice n°2

On joue à un jeu quis e déroule en deux parties. On lance d'abord une pièce de monnaie. On gagne 1€ si on obtient pile et 2€ sinon.
Ensuite, on lance un dé cubique numéroté de 1 à 6. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1€, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2€. Si on tombe sur le « 1 », on perd 5€.
Etablir la loi de probabilité donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

Exercice n°3

On lance un dé tétraédrique dont les faces portent les montants suivants en euros :

$$-4 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 3$$

Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros affiché sur le dé.

1. Calculer $E(X)$ puis interpréter le résultat.
2. Calculer $V(X)$.
3. On décide de doubler les montants affichés sur le dé. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce deuxième jeu.
   Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
4. Finalement, on décide d'ajouter 3 à chaque face du dé. On note Y la variable aléatoire associé au gain algébrique de ce troisième jeu. Déterminer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice n°4

Un professionnel vend des fauteuils. Sa commission est de 200€ par fauteuil vendu et ses frais sont de 280€ par jour.
Une étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui donne le nombre x de fauteuils vendus par jour suit la loi suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,2	0,2

On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.

1. Donner une relation entre X et Y.
2. Quelle est la probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée ?
3. Quel gain moyen journalier peut-il espérer si la conjecture reste la même ?

Exercice n°5

On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois jetons numérotés 0, 2 et 4 et l'autre contient 5 jetons numérotés 1, 1, 3, 3, et 3.
On tire un jeton de chaque sac et on additionne les numéros obtenus. Z est la variable aléatoire donnant le résultat.

Déterminer les valeurs prises par Z ainsi que sa loi de probabilité.

> Echantillon et somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice n°6

Une loterie comporte un très grand nombre de billets valant 1€. Parmi ces billets, 0,2% sont des billets gagnant à 100€, 1% à 50€, 2% à 10€ et les autres sont perdants.
Jean-Kevin, qui est le premier à choisir, prend 3 tickets au hasard.
On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique et S la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Jean-Kevin.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. En déduire le gain que peut espérer en moyenne Jean-Kevin en tirant 3 billets et l'écart-type de S.

Exercice n°7

Un stagiaire est chargé des statistiques pour un musée. Il a établi la loi de probabilité des dépenses des visiteurs :

Prix	0	2	5	7	8	10
Probabilité	0,15	0,05	0,35	0,2	0,2	0,05

On choisit 10 visiteurs au hasard. On note X la variable aléatoire donnée par la recette perçue sur ces 10 visiteurs. On assimile cela à un tirage aléatoire avec remise.

Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice n°8

On considère une variable aléatoire X qui prend, de façon équiprobable, les valeurs -4, 0, 1, 3 et 6.
On note M la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 50 de la loi de X.

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de M.