# Correction : fonction logarithme

## > Simplifier des expressions

### Exercice n°1

**a.** $\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = 1 + \ln(3)$.

**b.** $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2 \times 1 = 2$.

**c.** $\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}\ln(e) = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$.

**d.** $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) + \ln\left(\dfrac{5}{7}\right) = \ln(1) - \ln(3) + \ln(3) - \ln(5) + \ln(5) - \ln(7) = -\ln(7)$.

**e.** $\ln(2+\sqrt{3})^{20} + \ln(2-\sqrt{3})^{20} = \ln((2+\sqrt{3}^{20}) \times (2-\sqrt{3})^{20}) = 20\ln((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})) = 20\ln(4-3) = 20\ln(1) = 0$

### Exercice n°2

**a.** $\ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5}) = \ln((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})) = \ln(9-5) = \ln(4)$.

**b.** $3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(5) = \ln(2^3) + \ln(5) - \ln(3^2) = \ln\left(\dfrac{2^3 \times 5}{3^2}\right) = \ln\left(\dfrac{40}{9}\right)$.

**c.** $\ln(e^2) - \ln\left(\dfrac{2}{e}\right) = 2\ln(e) - \ln(2) + \ln(e) = 3 - \ln(2)$

## > Résoudre des équations et des inéquations

### Exercice n°3

**a.** $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5)$.

**b.** $e^{x^2} = 4 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^{\ln(4)} \Leftrightarrow x^2 = \ln(4) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(4)}$ ou $x = -\sqrt{\ln(4)}$.

**c.** $e^{-x} = 2 \Leftrightarrow e^{-x} = e^{\ln(2)} \Leftrightarrow -x = \ln(2) \Leftrightarrow x = -\ln(2)$.

**d.** $e^x > 0$ pour tout réel $x$ donc l'équation n'a pas de solution réelle.

### Exercice n°4

**a.** $e^{x+1} = 5 \Leftrightarrow x + 1 = \ln(5) \Leftrightarrow x = \ln(5) - 1$.

**b.** $\ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

**c.** $\ln(x-3)+\ln(9-x)=0 \Leftrightarrow \ln((x-3)(9-x))=\ln(1) \Leftrightarrow (x-3)(9-x)=1 \Leftrightarrow -x^2+12x-28=0.$

$\Delta = 32$ et $x_1 = \dfrac{-12+\sqrt{32}}{-2} = 6-2\sqrt{2}$ et $x_2 = 6+2\sqrt{2}$.

Les deux sont solutions car elles appartiennent à $]3\,;\,9[$, où le $\ln(x)$ est définie.

## Exercice n°5

**a.** $\ln(3x-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2=1 \Leftrightarrow x=1.$

**b.** $e^{3x+4}=2 \Leftrightarrow 3x+4=\ln(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(2)-4}{3}.$

**c.** $e^x+e^{-x}-6=0 \Leftrightarrow e^{-x}((e^x)^2+1-6e^x)=0 \Leftrightarrow (e^x)^2+1-6e^x=0$ car $e^x \neq 0$

Posons $X=e^x$. L'équation devient $X^2-6X+1=0$. $\Delta=32$ et $X_1=\dfrac{6-\sqrt{32}}{2}=3-2\sqrt{2}$ et $X_2=3+2\sqrt{2}$.

$e^{x_1}=X_1 \Leftrightarrow x_1=\ln(3-2\sqrt{2})$ et $e^{x_2}=X_2 \Leftrightarrow x_2=\ln(3+2\sqrt{2})$

## Exercice n°6

**a.** $e^x+5>4e^x \Leftrightarrow e^x-4e^x>-5 \Leftrightarrow e^x<\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x<\ln\left(\dfrac{5}{3}\right).$

L'ensemble des solutions sont les réels de l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{3}\right[$.

**b.** $\ln(6x-1)\geqslant 2 \Leftrightarrow 6x-1\geqslant e^2 \Leftrightarrow x\geqslant \dfrac{e^2+1}{6}.$

L'ensemble des solutions sont les réels de l'intervalle $\left[\dfrac{e^2+1}{6}\,;\,+\infty\right[$.

**c.** $\ln(3-x)-\ln(x+1)\leqslant 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)\leqslant \ln(1) \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{x+1}\leqslant 1 \Leftrightarrow 3-x\leqslant x+1 \Leftrightarrow 1\leqslant x.$

L'ensemble des solutions sont les réels de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

## Exercice n°7

**a.** $2+3\ln(2x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(2x)\leqslant -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2x\leqslant e^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x\leqslant \dfrac{e^{-\frac{2}{3}}}{2}.$

L'ensemble des solutions sont les réels de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{e^{-\frac{2}{3}}}{2}\right]$.

**b.** $\ln(5-x)-\ln(3)+\ln(x-1)\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{(5-x)(x-1)}{3}\right)\geqslant \ln(1) \Leftrightarrow \dfrac{(5-x)(x-1)}{3}\geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+6x-8}{3}\geqslant 0.$

Le numérateur possède deux racines : 2 et 4. L'ensemble des solutions sont les réels de l'intervalle $[2\,;\,4]$.

**c.** $\ln(3x^2-x-2)\geqslant \ln(6x+4) \Leftrightarrow 3x^2-x-2\geqslant 6x+4 \Leftrightarrow 3x^2-7x-6\geqslant 0.$

Ce polynôme s'annule en $-\dfrac{2}{3}$ et en 3. L'ensemble des solutions sont les réels de l'intervalle $[3\,;\,+\infty]$.

## > Etudier des fonctions en utilisant les propriétés du logarithme

### Exercice n°8

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^{2x}+2) - e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} = \dfrac{e^x(2-e^{2x})}{(e^{2x}+2)^2}$.

Pour tout réel $x$, $e^x > 0$ donc $(e^{2x}+2)^2 > 0$. Il faut étudier le signe de $2 - e^{2x}$.

$2 - e^{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{2x} \leqslant 2 \Leftrightarrow 2x \leqslant \ln(2) \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2}\ln(2) \Leftrightarrow x \leqslant \ln(\sqrt{2})$.

On obtient donc le tableau de variations suivants :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(\sqrt{2})$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | ↗ | $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ | ↘ | $0$ |

### Exercice n°9

1. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) + 1 = -\infty$.
   Or $\lim\limits_{X\to -\infty} X^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(x)+1))^2 = +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) + 1 = \infty$.
   Or $\lim\limits_{X\to +\infty} X^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x)+1)^2 = +\infty$.

2. $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln(x)+1) = \dfrac{2\ln(x)+2}{x}$.

3. Puisque $x > 0$, le signe de la dérivée dépend de celui de $2\ln(x) + 2$.
   $2 + \ln(x) + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$. D'où :

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

## Exercice n°10

1. On doit avoir $p(5730) = 0,375$

$\Leftrightarrow \quad 0,75e^{-\lambda 5730} = 0,375$

$\Leftrightarrow \quad e^{-5730\lambda} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \ln(e^{-5730\lambda}) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}{-5730} \approx 0,00012.$

2. 10% des particules de départ représentent une quantité de 0,075. Il restera donc $0,75 - 0,075 = 0,675$.

$p(t) = 0,0675$

$\Leftrightarrow \quad 0,75e^{-\lambda t} = 0,675$

$\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t} = 0,9$

$\Leftrightarrow \quad t = \dfrac{\ln(0,9)}{-0,00012} \approx 878.$

3. $p(t) = 0,5$

$\Leftrightarrow \quad 0,75e^{e^{-\lambda t}} = 0,5$

$\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t} = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \quad -\lambda t = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \quad t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}{-0,00012} \approx 3\ 379.$

## Exercice n°11

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}(x - 2(x+1)\ln(x+1)).$

$\lim\limits_{x \to -1^+} x + 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)\ln(x+1) = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -1^+} x - 2(x+1)\ln(x+1)) = -1$ d'où $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = \dfrac{(x+1) - x}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}.$

le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-2x - 1$ qui s'annule en $-\dfrac{1}{2}$. D'où le tableau de variations :

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1+2\ln(2)$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

3. $f(0) = 3 \times 0 + 1 - 2 \times 0 \times \ln(0+1) = 0$.
   Sur $\left(\left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right]\right.$, la fonction $f$ est continue puisque dérivable. Elle est également strictement croissante. Elle prend des valeurs de $-\infty$ à $-1+2\ln(2) > 0$ sur cet intervalle.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cette intervalle.

   Et comme $f(0) = 0$, elle admet une deuxième solution.

   A la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,72$ ;

4. $f$ étant strictement croissante sur $\left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, on obtient :

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

## Exercice n°12

1. $\lim\limits_{x\to 0} 3x+1 = 1$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

   Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\left(3 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)\right)$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 3 - 2\ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} = 3 - 2\ln(x) - 2 = 1 - 2\ln(x)$.

3. $1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$. D'où le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $\|\|$ $1$ | $\nearrow$ | $2e^{\frac{1}{2}}+1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

4. $f$ est strictement croissante sur $]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}]$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
   Donc pour tout réel de cet intervalle, $f(x) > 1$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

   Sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$, $f$ est strictement décroissante et prend des valeurs entre $2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$ et $-\infty$.
   $f$ est continue sur cet intervalle : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur cet intervalle.

5. D'après les questions précédentes :
   $f(x) > 0$ si $x \in ]0\,;\,\alpha[$, puis $f(x) < 0$ si $x \in ]\alpha\,;\,+\infty[$.

6. Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = -\dfrac{2}{x} < 0$. $f$ est donc concave sur $]0\,;\,+\infty[$ et sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes.

7. Une équation à cette tangente est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ce qui nous donne $y = x + 3$ après réduction.

8. D'après la concavité de la fonction $f$, $f(x) \leqslant x + 3$

   $\Leftrightarrow 3x + 1 - 2x\ln(x) \leqslant x + 3$

   $\Leftrightarrow -2x\ln(x) \leqslant -2x + 2$

   $\Leftrightarrow x\ln(x) \geqslant 1 + \dfrac{1}{x}$

   $\Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.