Combinatoire et dénombrement

1 Principe additif

Définitions : Ensemble fini et cardinal

Soit n un entier naturel.
On dit qu'un ensemble E est **fini** quand il possède un nombre fini n d'éléments. Ce nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de E et on le note $\text{Card}(E)$ ou encore $|E|$.

Exemples

- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ n'est pas fini. Il contient une liste infini d'éléments. On peut cependant le dénombrer.
- L'ensemble P des différents Pokemon existants est un ensemble fini. A la date du 25 Mai 2023, on a $\text{Card}(P) = 1010$.

Définition : Ensembles disjoints

On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ne possèdent aucun élément en commun.

Exemple

- Les ensemble $A_1 = \{1\,;\,2\,;\,6\}$ et $A_2 = \{a\,;\,c\}$ sont disjoints.
- Ce n'est pas le cas des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.

Propriété : Principe additif

Soient A et B deux ensembles.

- Si A et B sont disjoints alors $\text{Card}(A \cup B)$=$\text{Card}(A)$ + $\text{Card}(B)$
- Sinon, on a $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

De façon plus générale, si on note E_1, E_2, E_3, ... , E_p des ensemble deux à deux disjoints on a :

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_p) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \text{Card}(E_3) + ... + \text{Card}(E_p).$$

Exemples

- Si $A = \{a\,;\,b\}$ et $B = \{b\,;\,c\,;\,d\}$ alors $\text{Card}(A \cup B) = 2 + 3 - 1 = 4$
- Si $B = \{b\,;\,c\,;\,d\}$ et $C = \{f\,;\,g\}$ alors $\text{Card}(B \cup C) = 3 + 2 = 5$

2 Principe multiplicatif

Définitions : Couples et triplets

Soit E un ensemble de cardinal supérieur ou égal à 3.

On appelle **couple** de E la donnée de deux éléments a et b de E dans un ordre donné. On le note $(a\,;\,b)$.
On appelle **triplet** de E la donnée de trois éléments a , b et c de E dans un ordre donné. On le note $(a\,;\,b\,;\,c)$.

Attention Le couple $(a\,;\,b)$ est différent du couple $(b\,;\,c)$ tout comme le triplet $(a\,;\,b\,;\,c)$ est différent du triplet $(a\,;\,c\,;\,b)$ ou $(b\,;\,c\,;\,a)$, ...

Exemples

- $(2\,;\,3)$ est un couple de $\mathbb{N}$.
- $(\pi\,;\,-3\,;\,\sqrt{2})$ est un triplet de $\mathbb{R}$ mais n'est pas le même triplet que $(\sqrt{2}\,;\,\pi\,;\,-3)$.

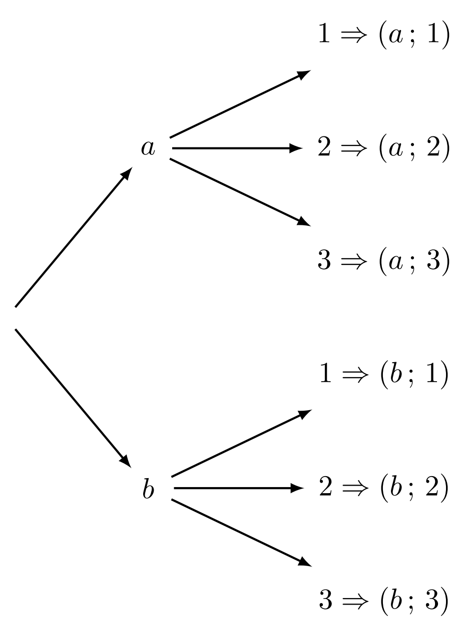
Définition : Produit cartésien de deux ensemble

Soit E et F deux ensembles finis.
Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ où x est un élément de E et y est un élément de F. On note alors E × F.

Exemples Soient $\mathrm{E} = \{\ a\,;\,b\ \}$ et $\mathrm{F} = \{\ 1\,;\,2\,;\,3\ \}$.

Pour représenter le produit cartésien E × F, on peut utiliser un tableau ou un arbre.

	1	**2**	**3**
a	$(a\,;\,1)$	$(a\,;\,2)$	$(a\,;\,3)$
b	$(b\,;\,1)$	$(b\,;\,2)$	$(b\,;\,3)$



Dans les deux cas, cela nous permet de trouver la liste

de tous les couples de ce produit cartésien :

$\mathrm{E}{\times}\mathrm{F} = \{\ (a\,;\,1)\,;\,(a\,;\,2)\,;\,(a\,;\,3)\,;\,(b\,;\,1)\,;\,(b\,;\,2)\,;\,(c\,;\,3)\ \}$

On observe également que Card(E×F) = 6.

Définition : Produit cartésien, cas général

Soit p un entier naturel non nul.
On considère p ensembles finis E_1, E_2, ... , E_p.
Le **produit cartésien** $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times ... \times \mathrm{E}_p$ est l'ensemble des p-uplets (on dit aussi p-listes) :
$(x_1, x_2, ... , x_p)$ où $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $x_2 \in \mathrm{E}_2$, ... , $x_p \in \mathrm{E}_p$.

Exemple

Un code de carte bancaire est un 4-uplets de l'ensemble fini $\mathrm{E} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 \}$.
Par exemple : $(4 ; 1 ; 2 ; 0) \in \mathrm{E}^4$ ou encore $(1 ; 4 ; 2 ; 0) \in \mathrm{E}^4$.

Propriété : Principe multiplicatif

Soit p un entier naturel non nul.
On considère p ensembles finis E_1, E_2, ... , E_p.
$\mathrm{Card}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times ... \times \mathrm{E}_p) = \mathrm{Card}(\mathrm{E}_1) \times \mathrm{Card}(\mathrm{E}_2) \times ... \times \mathrm{Card}(\mathrm{E}_p)$.

En particulier, pour un ensemble fini E on a : $\mathrm{Card}(\underbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times ... \times \mathrm{E}}_{n \text{ fois}}) = \mathrm{Card}(\mathrm{E})^n$.

Exemples En reprenant le code de carte bancaire :

$\mathrm{Card}(\mathrm{E}) = 10$ donc $\mathrm{Card}(\mathrm{E})^n = 10^4 = 10\ 000$. Il y a 10 000 combinaisons possibles pour un code de carte bancaire, ou pour tout code comportant 4 chiffres de 0 à 9.

3 k-uplets et permutations

Définition : éléments distincts

On considère E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul.
Soit k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.
On appelle **k-uplets d'éléments distincts** de E un k-uplets de E où tous les éléments sont différents.
On parle aussi d'**arrangement** de k éléments parmi n.

Exemples On considère l'ensemble $\mathrm{E} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- $(1 ; 6 ; 3)$ est un triplet ou un 3-uplets d'éléments distincts de E. Ce n'est pas le même triplet que $(6 ; 3 ; 1)$.
- $(1 ; 2 ; 3 ; 1 ; 4)$ n'est pas un 5-uplets d'éléments distincts puisque des éléments se répètent.
- $(4 ; 1 ; 3 ; 6)$ est un 4-uplets d'éléments distincts de E.

Définition : factorielle

Soit n un entier naturel.
On appelle **factorielle n** le produit de tous les nombres entiers naturels de 1 à n.
On note alors $n!$ et on lit « factorielle n ».

Exemples

- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = 120$
- $1! = 1$

Remarque Par convention, on aura $0! = 1$.

Définition : Permutation

Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul.
On appelle **permutation** de E un n-uplet d'éléments distincts de E.

Exemple Soit $\mathrm{E} = \{ a\,; b\,; c \}$.

Les permutations de l'ensemble E sont les triplets (ou 3-uplets) suivants : $\{a\,; b\,; c\}$; $\{ a\,; c\,; b\}$, $\{ b\,; a\,; c\}$, $\{ b\,; c\,; a\}$, $\{ c\,; a\,; b\}$ et $\{ c\,; b\,; a\}$.

Propriété : Nombre de permutations

Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul.
Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple Soit $\mathrm{E} = \{ a\,; b\,; c \}$.

Ici, $n = 3$. Le nombre de permutations de E est de $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. On retrouve bien nos 6 3-uplets de l'exemple précédents.

Propriété : Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Soit E un ensemble fini possédant n éléments où n est un entier naturel non nul.
Soit k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.
Le nombre de $k$uplets d'éléments distincts de E est égal à $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Exemple On prend à nouveau l'ensemble $\mathrm{E} = \{ 1\,; 2\,; 3\,; 4\,; 5\,; 6\}$.

On veut connaître le nombre de 4-uplets d'éléments distincts de E. Ce sont des parties de E à 4 éléments qui ne se répètent pas (éléments distincts).

On applique notre propriété avec $n = 6$ et $k = 4$: $\dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$.

On peut faire 360 4-uplets d'éléments distincts de E différents.

4 Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Définition : Partie d'un ensemble

Soient A et E deux ensembles finis.
On dit que A est une **partie** de l'ensemble E (ou sous-ensemble de E) si tous les éléments de A sont des éléments de E.
On note alors $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

Exemple Soit $\mathrm{E} = \{a\,;\,b\,;\,c\,\}$.

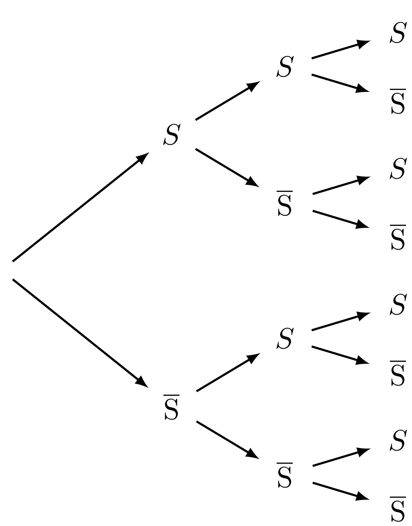
Tous les ensembles suivants sont des parties de E : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a\,;\,b\}$, $\{a\,;\,c\}$, $\{b\,,\,c\}$, $\{a\,;\,b\,;\,c\}$ et $\{\emptyset\}$.

Propriété : Nombre des parties d'un ensemble à n éléments

Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul.
Le nombre de parties de E est égal à 2^n.
On note $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 2^n$.

Exemples

- En informatique, toute information est codée à l'aide d'une succession du caractère 0 et du caractère 1. Un octet correspond à un 8-uplet de l'ensemble $\{0\,;\,1\}$. Le nombre d'octets différents est donc de $2^8 = 256$.
- On considère un alphabet constitué de trois éléments : $\mathrm{E} = \{\ \mathrm{J}\,;\,\mathrm{K}\}$. Un mot de longueur n est un n-uplet de E. Donc le nombre de mots de longueurs n que l'on peut faire avec cet alphabet est de 2^n (que le mot ait un sens ou non). Par exemple, il y a 64 mots possibles de 6 lettres ($2^6 = 64$).
- On considère une épreuve de Bernoulli. Elle possède deux issues : le succès ou l'échec. On note le succès S et l'échec $\overline{\mathrm{S}}$. Si on répète n fois une expérience de Bernoulli dans les mêmes conditions et de façon indépendante, on obtient un n-uplet de l'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{S}\,;\,\overline{\mathrm{S}}\}$. Le nombre total d'issues est alors de 2^n.
  Pour 3 répétitions, on obtient l'arbre suivant de $2^3 = 8$ issues.



5 Combinaisons

Définition : Combinaison

Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul. Soit k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.
On appelle **combinaison** de k éléments de E tout sous-ensemble de E.

Exemple Soit $E = \{a\,;\, b\,;\, c\,;\, d\,;\, e\}$.

Le sous-ensemble $\{a\,;\, b\,;\, c\}$ est une combinaison de E à 3 éléments.
Le sous-ensemble $\{a\,;\, b\}$ est une combinaison de E à 2 éléments qui est la même combinaison que $\{b\,;\, a\}$.

Remarque Pour une combinaison, l'ordre des éléments n'a pas d'importance., contrairement à ce que l'on a vu jusqu'à présent.

Propriété : Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ce nombre se note $\binom{n}{k}$ et on prononce « k parmi n ». On parle également de **coefficient binomiaux**.

Propriété : Cas particuliers

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exemple

Dans la classe de Jean-Kevin, il y a 18 filles et 16 garçons. Ils préparent les élections de délégués où 4 personnes vont être élues (on ne fait pas la différence entre un titulaire et un suppléant.) Combien existe-t-il de possibilités de résultats pour cette élection ?

$18 + 16 = 34$. Il y a 34 élèves dans la classe de Jean-Kevin.
4 élèves vont être élus parmi les 34. On calcule alors $\binom{34}{4} = \frac{34!}{4!(34-4)!} = \frac{34!}{4!30!} = \frac{34 \times 33 \times 32 \times 31}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 46\ 376$.
Il existe donc 46 376 combinaisons possibles.

Propriété : Symétrie

Soit n un entier naturel non nul et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Propriété : Relation de Pascal

Soit n un entier naturel non nul et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

__Démonstration__ Soit n un entier naturel non nul et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \times \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \\
&= \frac{n! \times (n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)! \times (n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Méthode : Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal (mathématicien Blaise Pascal, 1623 - 1662) est un outil permettant de lire efficacement les coefficients binomiaux.
Par exemple : **3** s'obtient en additionnant les cases supérieures 2 et 1.
De même, **15** s'obtient en additionnant les cases supérieures 5 et 10.
Les nombres affichés sont alors les valeurs de $\binom{n}{k}$.

Par exemple : $\binom{6}{4} = \mathbf{15}$.

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Propriété : Nombre des parties d'un ensemble à n éléments

Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul.
Dans la partie n°4 de ce chapitre, on a vu que le nombre de parties de E est égal à 2^n.
Le nombre de sous-ensemble de E est également donné par :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

Démonstration Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier naturel non nul.

Pour connaître le nombre total de parties de E, il faut additionner le nombre de sous-ensemble à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, ... jusqu'à n éléments.

Autrement dit : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$.

A chaque fois que l'on construit un sous-ensemble de E, on réalise n étapes de sélection d'un élément : on le choisit ou pas pour le mettre dans le sous-ensemble. Ce qui donne deux possibilités.
Ce qui donne donc le produit de n termes $2 \times 2 \times 2 \times ... \times 2$ soit 2^n.