

Exercices sur les nombres complexes (3)

> Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement

Exercice n°1 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z = 3e^{i\pi}$

b. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

c. $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Exercice n°2 Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z = 5$

b. $z = -3$

c. $z = -3i$

d. $z = -3 + 3i$

e. $z = -2\sqrt{3} - 2i$

f. $z = \sqrt{3} - 3i$

Exercice n°3 On considère le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la forme exponentielle des nombres $\bar{z}$ et $-z$.
2. Montrer que $2e^{-i\frac{\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3. En déduire la forme exponentielle du nombre $2e^{-i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

> Choisir une forme adaptée pour résoudre un problème

Exercice n°4

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 + i\sqrt{3}$, $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ et $z_C = z_1 + z_B$.

1. Déterminer une forme exponentielle de z_A et z_B .
2. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
3. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

Exercice n°5 On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 6 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

1. Déterminer une forme trigonométrique de z_1 .
2. Préciser un argument de z_2 .
3. Ecrire le produit $z_1 z_2$ sous forme algébrique.
4. En utilisant la notation exponentielle, écrire le produit $z_1 z_2$ sous forme trigonométrique.
5. En déduire la valeur exacte de $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$.

> Utiliser les formules de Moivre et d'Euler

Exercice n°6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(x)$.

1. Linéariser l'expression $f(x)$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \, dx$.

Exercice n°7 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant la formule de Moivre, montrer que $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ et que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.
2. Montrer que $\cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)$ et que $\sin(3\theta) = 4 \sin^3(\theta) - 3 \sin(\theta)$.
3. Montrer que $\cos(4\theta) = 8 \cos^4(\theta) - 8 \cos^2(\theta) + 1$ et que $\sin(4\theta) = 4 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - 4 \cos(\theta) \sin^3(\theta)$.