Produit scalaire (1)

1 Généralités

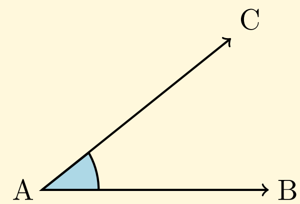
Définition

On considère deux points A et B.
On appelle **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ la distance entre les points A et B. Cette longueur AB est notée $\|AB\|$.

Définition

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

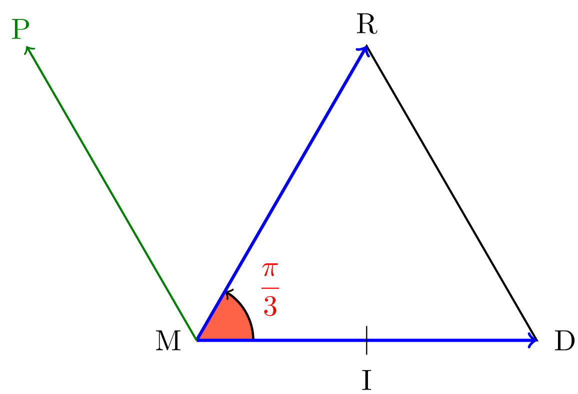


Propriété

Pour tous points A et B du plan :

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$$

Exemples On considère le triangle équilatéral MDR ci-dessous de côté 6 cm. Soit I le milieu de [MD].



- On souhaite calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MD} \,.\, \overrightarrow{MR}$.

  Ici, MD = MR = 6 cm.

  Puisque MDR est un triangle équilatéral, chacun de ses angles mesurent $\frac{\pi}{3}$ radians. Et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

  Ainsi : $\overrightarrow{MD} \,.\, \overrightarrow{MR} = MD \times MR \times \cos(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MR})$

  $$= 6 \times 6 \times \frac{1}{2}$$

  $$= 18$$

- On souhaite calculer cette fois-ci $\overrightarrow{MI} \,.\, \overrightarrow{DR}$. Pour cela, on construit un point P tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DR}$.
  Ainsi : $\overrightarrow{MI} \,.\, \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{MI} \,.\, \overrightarrow{MP} = 3 \times 6 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -9$

Remarques Puisque pour tout réel x $\cos(-x) = \cos(x)$, le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation des angles.
Si l'un des deux vecteur est nul alors le produit scalaire vaut 0.

Propriété : symétrie

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{u} \, . \, \vec{v} = \vec{v} \, . \, \vec{u}$$

Propriété : bilinéarité

Soit k un nombre réel. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:

$$\vec{u} \, . \, (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \, . \, \vec{v} + \vec{u} \, . \, \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{u} \, . \, (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \, . \, \vec{v} = k(\vec{u} \, . \, \vec{v})$$

Propriété : identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

2 Produit scalaire à l'aide de normes

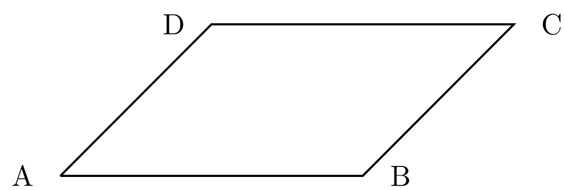
Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$ ou bien $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$ ou bien $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$.

Exemple On considère le parallélogramme ABCD ci-dessous tel que AC = 7cm, AB = 6 cm et AD = 3 cm.

On souhaite calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.
Problème, si on souhaite utiliser la première formule de cette leçon, on ne peut pas déterminer la valeur de $\cos(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$. On va donc utiliser la formule de la dernière propriété en posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

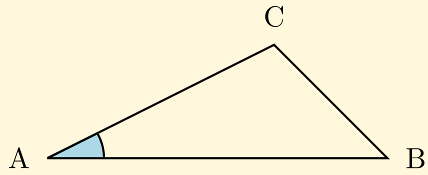


$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AD}^2\right) = \frac{1}{2}(7^2 - 6^2 - 3^2) = 2.$$

Théorème d'Al-Kashi

Pour tout triangle ABC on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$



Remarque Si on se place dans un triangle ABC rectangle en A, on retrouve la formule du théorème de Pythagore puisque $\cos(BAC) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Démonstration

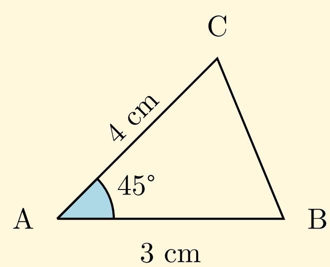
$$\begin{aligned} BC^2 &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \|\overrightarrow{AB}\|^2 \\ &= AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\widehat{CAB}) \end{aligned}$$

Méthode : Déterminer une longueur

On considère le triangle ABC ci-dessous tel que AB = 3 cm, AC = 4 cm et $\widehat{BAC} = 45°$. On souhaite calculer BC.

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(45°) \\ &= 25 - 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

$BC = \sqrt{25 - 12\sqrt{2}} \approx 2,83$



Méthode : Déterminer angle

On considère le triangle ABC ci-dessous tel que AB = 10 cm, AC = 7 cm et BC = 5 cm. On souhaite calculer $\widehat{BAC}$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$5^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \times 10 \times 7 \times \cos(\widehat{BAC})$

$25 = 100 + 49 - 140\cos(\widehat{BAC})$

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{25 - 100 - 49}{-140}$

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{31}{35}$

A l'aide de la calculatrice : $\arccos\left(\dfrac{31}{35}\right) \approx 27,7$.