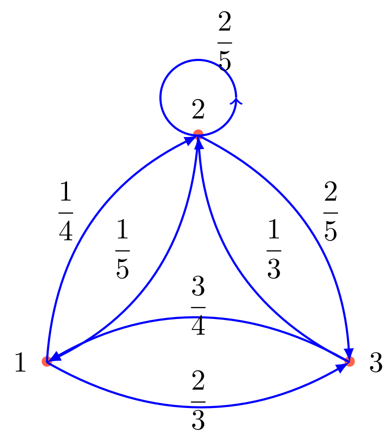
Marche aléatoire sur un graphe

Principe

On considère trois sommets nommés 1 ; 2 et 3. On considère ensuite l'expérience aléatoire qui consiste à se trouver sur un de ses sommets à une certaine étape n.
Le passage de l'étape n à l'étape $n+1$ consiste à se déplacer d'un sommet à un autre selon les probabilités situées sur chacune des arêtes orientées du graphe ci-dessous :



Les probabilités indiquées sur les arêtes sont des probabilités conditionnelles. Par exemple, la probabilité de se trouver au sommet 3 sachant que l'on part du sommet 2 est égale à $\frac{2}{5}$.
On note (X_n) la suite de variables aléatoires prenant les valeurs de l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; 3 \}$. On parle de **marche aléatoire** sur l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; 3 \}$.

Exercice n°1

1. Déterminer la matrice de transition M de cette marche aléatoire.
2. On note U_n la matrice ligne associée à la marche aléatoire à l'instant n qui donne les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes. On donne $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Exprimer U_n en fonction de U_0.
3. Déterminer U_2 et dire à quoi cela correspond.
4. Quelle est la probabilité de se trouver au sommet 1 du graphe à l'étape n°5 ?

Exercice n°2 *D'après LaboMaths du lycée Roland-Garrors, La Réunion*

Dans la ville de Jean-Kevin, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition. Un habitant peut être :

- S : « sain, donc non malade et non infecté »

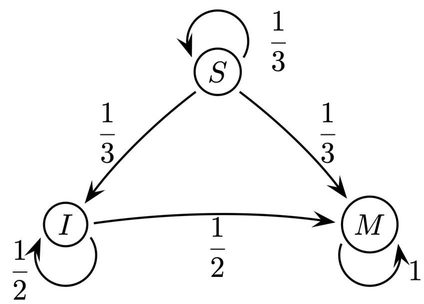
- I : « infecté mais non malade »
- M : « malade et infecté »

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que comptent la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état selon le processus suivant :

- Parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent sains est de $\dfrac{1}{3}$ et de ceux qui deviennent malades est de $\dfrac{1}{3}$.
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est de $\dfrac{1}{2}$

La situation peut-être représentée par le graphe pondéré ci-dessous :



On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & i_n & m_n \end{pmatrix}$ la matrice donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade au bout de la n-ième semaine.
On a alors $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} s_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n + m_n \end{array}\right.$$

1. Ecrire la matrice A de transition telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_N \times A$.
2. Exprimer P_n en fonction de P_0 et de A.
3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de 4 semaines et arrondir les valeurs à 10^{-2}. Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de 4 semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place du vaccin. Ainsi, $Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination. Pour tout entier naturel n, on a a lors $Q_{n+1} = Q_n \times B$. D'après la précédente partie, on a également $Q_0 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,10 & 0,89 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.
2. Déterminer le réel k tel que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1. On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a $B^n = B^2$.
3. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   (b) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie. Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce à ce vaccin ?

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

2. $U_n = U_0 \times M^n$.

3. $U_2 = U_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{7}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{26}{75} & \frac{103}{300} & \frac{31}{100} \\ \frac{1}{15} & \frac{3}{10} & \frac{19}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

   Il s'agit de l'état probabiliste de la situation au bout de deux semaines.

4. $U_5 = U_0 \times M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{9889}{45000} & \frac{115309}{360000} & \frac{55193}{120000} \\ \frac{131129}{450000} & \frac{73789}{225000} & \frac{171293}{450000} \\ \frac{53611}{135000} & \frac{91579}{270000} & \frac{2637}{10000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9889}{45000} & \frac{131129}{450000} & \frac{53611}{135000} \end{pmatrix}$.

   La probabilité de se trouver sur le sommet 1 du graphe à l'étape 5 est de $\frac{9889}{45000}$.

Exercice n°2

Partie A

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $P_n = P_0 \times A^n$.

3. $P_4 = P_0 \times A^4 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0 & 0,01 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{81} & \frac{65}{648} & \frac{575}{648} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{15}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,01 & 0,10 & 0,89 \end{pmatrix}$

   La probabilité que l'individu soit sain au bout de 4 semaines est d'environ 0,01 soit 1%.

Partie B

1. $Q_{n+1} = Q_n \times B = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

   On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{n+1} & = & \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n \\ I_{n+1} & = & \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n \\ M_{n+1} & = & \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{array} \right.$$

2. $B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times J$. Le réel k est donc égal à $\frac{1}{3}$.

3. (a) Montrons ce résultat par récurrence.

   Initialisation

   $Q_2 = Q_0 \times B^2 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,1 & 0,89 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   La proposition est donc vraie pour $n = 2$.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 2 on ait $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   $Q_{n+1} = Q_n \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

   La proposition est donc héréditaire.

   Conclusion

   La proposition est vraie pour $n = 2$ et héréditaire à partir de cet entier. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

   (b) Au bout de n semaines après la vaccination, on a autant de chance d'être malade ou sain ou porteur sain. Le vaccin ne semble donc pas très efficace.