Géométrie repérée

Remarque

Durant tout le chapitre, on se placera dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

1 Quelques rappels

Propriétés

- On considère une droite (d) d'équation cartésienne $ax+bx+c=0$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).
- Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$.
- Deux droites sont parallèles si et seulement si leur vecteur directeur sont colinéaires.
- Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$. La distance AB est donnée par la formule $\mathrm{AB}=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}$.
- Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$. Les coordonnées du milieu de [AB] sont $\left(\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}\,;\,\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right)$.

Exemple : déterminer une équation cartésienne de droite

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et passant par $\mathrm{A}(-3\,;\,-1)$.

Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ un point de la droite (d). Puisque A appartient aussi à la droite (d) les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x+3\\y+1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires. On a donc :

$$(x+3)\times(-2)-(y+1)\times 5=0$$
$$\Leftrightarrow -2x-5y-7=0$$

Une équation de la droite (d) est donc (d) : $-2x-5y-7=0$.

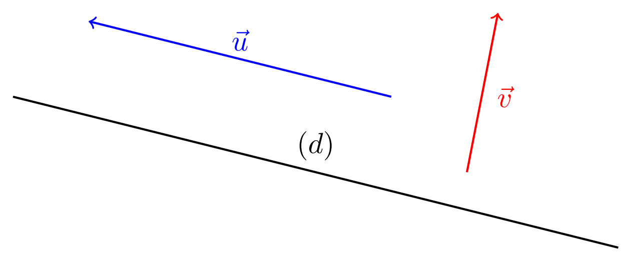
2 Vecteur normal

Définition

Soit (d) une droite.
On appelle **vecteur normal** de la droite (d) tout vecteur non nul qui est orthogonal à un vecteur directeur de la droite (d).

Exemple

Le vecteur $\vec{u}$ ci-contre est un vecteur directeur de la droite (d).
Le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et est donc un vecteur normal à la droite (d).



Propriétés

Soit (d) une droite.

- Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d) alors une équation cartésienne de cette droite est $(d) : ax + by + c = 0$.
- Réciproquement, si (d) a pour équation cartésienne $(d) : ax + by + c = 0$ alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

Démonstration

- Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ un point de (d). $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-x_\mathrm{A}\\y-y_\mathrm{A}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Or deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Dans notre cas, si et seulement si on a :
$a(x-x_\mathrm{A})+b(y-y_\mathrm{A}) = 0$ ce qui est équivalent à $ax+by+(-ax_\mathrm{A}-by_\mathrm{A}) = 0$. Il suffit de poser $c = -ax_\mathrm{A} - by_\mathrm{A}$ pour démontrer la propriété.

- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d) alors le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d). On pose $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{n}$ vaut 0 donc les deux vecteurs sont orthogonaux. Cela montre que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de droite à l'aide d'un vecteur normal

Soit (d) une droite passant par $\mathrm{A}(6\,;\,-2)$ et dont $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal. Déterminer une équation cartésienne de (d).

Puisque $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d), une équation cartésienne de cette droite est : $-2x+3y+c=0$.
Puisque A appartient à cette droite, on a $-2\times 6+3\times(-2)+c=0$ soit $c=18$. Une équation cartésienne de (d) est donc $(d) : -2x+3y+18=0$.

Exemple : Trouver les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit $(d) : 4x-y+1=0$ et soit $\mathrm{A}(3\,;\,-2)$ un point. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (d).
Notons H ce projeté orthogonal. Le but est de déterminer une équation cartésienne de (AH). Puis, on utilise les équations des deux droites pour résoudre un système de deux équations pour trouver les coordonnées de H.

- Déterminons une équation cartésienne de (AH).
  Puisque les droites (d) et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de (d) est un vecteur normal de (AH). Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est directeur à (d) donc normal à (AH). Une équation cartésienne de (AH) est donc $x+4y+c=0$. Or A appartient à (AH) donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (AH). On obtient donc $3+4\times(-2)+c=0$ ce qui donne $c=5$. Une équation cartésienne de (AH) est donc (AH) : $x+4y+5=0$.

- Trouver les coordonnées de H.
  H est le point d'intersection de (d) et de (AH). Ses coordonnées vérifient donc les deux équations cartésiennes. On va résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}4x-y+1&=&0\\x+4y+5&=&0\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{rcl}y&=&4x+1\\x+4(4x+1)+5&=&0\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{rcl}y&=&4x+1\\17x+9&=&0\end{array}\right.$$

  On trouve alors $x=-\dfrac{9}{17}$ et $y=-\dfrac{19}{17}$.

3 Equation de cercle

Propriétés

Soit $\mathrm{O}(x_{\mathrm{O}}\,;\,y_{\mathrm{O}})$ un point et soit r un réel strictement positif.
L'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r est :

$$(x-x_{\mathrm{O}})^2+(y-y_{\mathrm{O}})^2=r^2$$

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle

Soient A(2 ; -3). Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 4.
On sait que $\mathcal{C} : (x - x_{\text{A}})^2 + (y - y_{\text{A}})^2 = r^2$. On remplace par les données pour trouver :
$\mathcal{C} : (x - 2)^2 + (y + 3)^3 = 16$.

Exemple : Reconnaître une équation cartésienne d'un cercle

On considère l'équation $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$. Montrer qu'il s'agit de l'équation cartésienne d'un cercle dont on déterminera le rayon ainsi que les coordonnées de son centre.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \end{aligned}$$

C'est l'équation cartésienne du cercle de centre (2 ; 3) et de rayon 5.