Dérivation : approfondissement

Dérivée n-ième d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel.

On dit que f est **dérivable n fois** sur I si f est dérivable sur I, si f' est dérivable sur I, ..., si $f^{\overbrace{''\cdots'}^{n \text{ fois}}}$.
La dérivée n-ième est alors notée $f^{(n)}$.

Remarque

En particulier, $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$.

Exercice n°1 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$.

1. Déterminer $f_1'(x)$ et $f_2''(x)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, il existe un réel α_n tel que $g_n(x) = f_n^{(n)} = \dfrac{\alpha_n}{x}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $f_n^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $f_1'(x) = (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ et $f_2''(x) = (x\ln(x))'' = (1+\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

2. **Initialisation**

   L'initialisation est vérifiée à la question précédente, pour $n = 1$.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 1$, la proposition soit vraie. On a donc $g_n(x) = f_n^{(n)} = \dfrac{\alpha_n}{x}$.

   $$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= f_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= (xf_n(x))^{(n+1)}(x) \\ &= xf_n^{(n+1)(x)+(n+1)f_n^{(n)}(x)} \\ &= xg'(x) + (n+1)g_n(x) \\ &= -\frac{\alpha_n}{x} + \frac{(n+1)\alpha_n}{x} \\ &= \frac{n\alpha_n}{x}. \end{aligned}$$

   On a donc bien prouvé l'existence d'un α_{n+1} tel que $g_{n+1}(x) = \dfrac{\alpha_{n+1}}{x}$ si on pose $\alpha_{n+1} = n\alpha$.
   La proposition est donc héréditaire.

   Conclusion

   La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour un entier naturel supérieur ou égal à 1. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

3. On a vu à la question précédente que $\alpha_{n+1} = n\alpha$. Puisque $\alpha_1 = 1$: $\forall\ n \geqslant 1$, $\alpha_n = (n-1)!$.

   Donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.