Exercices sur les variations de fonctions

> Etudier les variations d'une fonction

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice n°4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x-4}$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Etudier les variations de la fonction $u : \mapsto 3x - 4$.
3. En déduire les variations de la fonction f.
4. Utiliser la même méthode pour étudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

Exercice n°5

On lance un projectile verticalement à partir du sol. La hauteur en mètre atteinte par le projectile est donnée en fonction du temps t (en seconde) par :

$$h(t) = -4,9t^2 + 10t$$

1. Calculer la hauteur à laquelle se trouve le projectile au bout de 0,5 seconde.
2. On admet que a vitesse instantanée du projectile à l'instant t est égale au nombre dérivé $h'(t)$. Montrer que lorsque le projectile atteint son point le plus haut, sa vitesse est nulle.
3. Au bout de combien de temps le projectile retombe-t-il sur le sol ?

> Extremum d'une fonction

Exercice n°6 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice. Cette fonction semble-t-elle admettre un extremum sur son intervalle de définition ?
2. Etudier les variations de f sur son intervalle de définition et vérifier la conjecture faite à la question précédente.

Exercice n°7 On considère la fonction f définie sur $]-3\,;3[$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Conjecturer le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-3\,;3]$ en traçant la courbe représentative de la fonction f à la calculatrice.
2. Démontrer le résultat de la question précédente.

Exercice n°8

Un générateur G a une force électromotrice $\mathrm{E}=10$ V et une résistance $r=2\ \Omega$. On branche un rhéostat, de résistance R variable, aux bornes de ce générateur. On appelle I l'intensité du courant dans le circuit ainsi formé, U la tension aux bornes du générateur et P la puissance fournie par ce générateur. On a alors :

$$\mathrm{E}=(\mathrm{R}+r)\mathrm{I} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}=\mathrm{RI}^2$$

1. Exprimer la puissance P en fonction de R uniquement.
2. On pose $\mathrm{P}=f(\mathrm{R})$. Etudier les variations de la fonction f pour $\mathrm{R}\in[0\,;50]$.
3. Pour quelle valeur de R la puissance P est-elle maximale ? Quelle est la valeur de cette puissance maximale ?

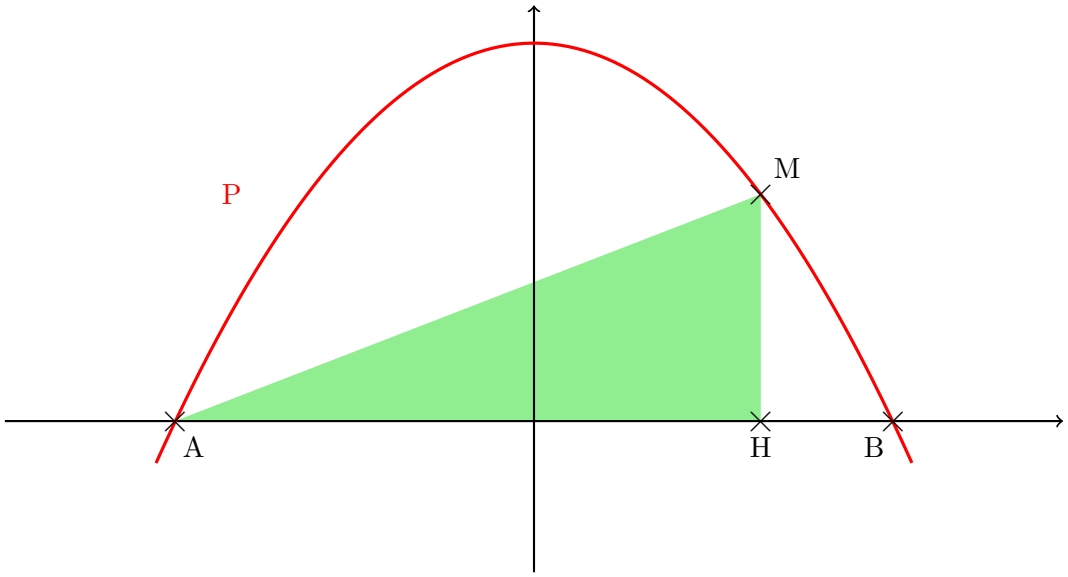
Exercice n°9

Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1 dm^3 ayant la forme d'un pavé droit de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x>0$. L'unité de longueur est le décimètre.

1. Montrer que $y=\dfrac{1}{x^2}$.
2. En déduire que l'aire totale de la boîte est $S(x)=2x^2+\dfrac{4}{x}$.
3. Montrer que pour tout réel $x>0$: $S'(x)=\dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.
4. En déduire le sens de variation de S sur $]0\,;+\infty[$.
5. Donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.

Exercice n°10

Dans un repère orthonormé du plan, on considère la parabole P d'équation $y=-\dfrac{2}{9}x^2+8$. Elle coupe l'axe des abscisses en $\mathrm{A}(-6\,;0)$ et $\mathrm{B}(6\,;0)$.
On se donne un réel $x\in[-6\,;6]$ et un point M appartenant à P d'abscisse x. Enfin, on note H le projeté orthogonal de M sur [AB].



1. Déterminer en fonction de x les coordonnées de M et de H.
2. Montrer que l'aire du triangle AMH est égale à $-\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 24$.
3. On pose $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 24$. Déterminer $f'(x)$.
4. Etudier les variations de la fonction f sur $[-6\,;\,6]$.
5. Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire de AMH est minimale est déterminer la valeur de cette aire.

Exercice n°11

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100€.

Partie A : coût de production unitaire

Le coût de production unitaire $U(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est $U(x) = x - 10 + \dfrac{900}{x}$ pour $x \in [10\,;\,100]$.

1. Etudier les variations de la fonction U.
2. Pour quelle production le coût unitaire est-il le plus bas ? Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.

Partie B : Etude du bénéfice

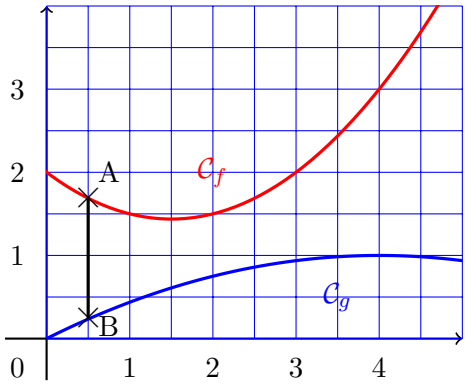
1. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.
2. Déterminer les variations de la fonction B sur $[10\,;\,100]$ et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

> Position relative de deux courbes, établir des inégalités

Exercice n°12 On a représenté les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Pour une abscisse donnée x_0 appartenant à $[0\,;\,4]$, on appelle distance entre les deux courbes la longueur de tout segment [AB] où A appartient à $\mathcal{C}_f$, B appartient à $\mathcal{C}_g$ et ces deux points ont pour abscisse x_0. Cette distance est une fonction d définie sur $[0\,;\,4]$ par $d(x) = f(x) - g(x)$. Jean-Kevin dit que pour tout réel x de $[0\,;\,4]$, $1 \leqslant d(x) \leqslant 2$.
A-t-il raison ?



Exercice n°13

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$.

1. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $f(x)$ quand x varie entre -3 et 3.
2. Déterminer les variations de la fonction f sur son intervalle de définition.
3. Déterminer alors le meilleur encadrement possible de $f(x)$ quand $x \in [-3\,;\,3]$.

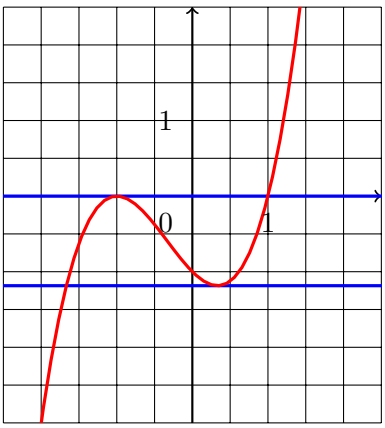
Exercice n°14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative. Déterminer $f(x) - g(x)$.
4. Pour quelles valeurs de x $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$?

Exercice n°15

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.On note f' sa dérivée. On sait que $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes horizontales :

- L'axe des abscisses comme tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $\text{A}(-1\,;\,0)$.
- La droite T_B comme tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $\text{B}\left(\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{32}{27}\right)$.

1. Par lecture graphique, donner les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. On note maintenant $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2$ et on note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$. En utilisant les questions précédentes, étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction g et de la droite $\mathcal{D}$.