Suites arithmétiques et géométriques

1 Suite arithmétique

Définitions

On dit qu'une suite est **arithmétique** si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre.
Si (u_n) est une suite arithmétique elle est donc définie par un réel u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel.
Le réel r est appelé **raison** de la suite.

Exemple La suite des entiers naturels multiples de 6 est une suite arithmétique avec $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = u_n + 6$. On a $u_1 = 6$, $u_2 = 12$, $u_3 = 18$, ...

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

- Si $r > 0$ alors (u_n) est croissante sur son ensemble de définition.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est décroissante sur son ensemble de définition.

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr$$

De façon générale, pour tous entiers naturels p et k :

$$u_p = u_k + (p-k)r$$

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a donc $u_{n+1} = u_n + r$. En particulier, on a :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$
...
$u_n = u_{n-1} + r = u_0 + nr$

Remarque Grâce à ce théorème, on peut déterminer un terme d'une suite arithmétique sans forcément connaître les précédents.

Exemples Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ de raison $\frac{5}{6}$.
On souhaite calculer u_{65}.
$u_{65} = u_0 + 65 \times r = -3 + 65 \times \frac{5}{6} = \frac{307}{6}$.

Soit (v_n) une suite arithmétique de raison 8 et telle que $u_{15} = 109$. On souhaite déterminer u_{11}.
$u_{11} = u_{15} + (11 - 15)r = 109 + (-4) \times 8 = 77$.

Méthode : montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques $u_{n+1} - u_n$. Si le résultat est un nombre réel, il s'agit d'une suite arithmétique dont la raison est le nombre réel trouvé.
Si le résultat dépend de n, ce n'est pas une suite arithmétique.

Exemples

- La suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (n+1)^2 - n^2$ est-elle arithmétique ?

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+1+1)^2 - (n+1)^2 - [(n+1)^2 - n^2] \\ &= n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 2n - 1 + n^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(w_n) est donc une suite arithmétique de raison 2.

- La suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = n^2 - 1$ est-elle arithmétique ?

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

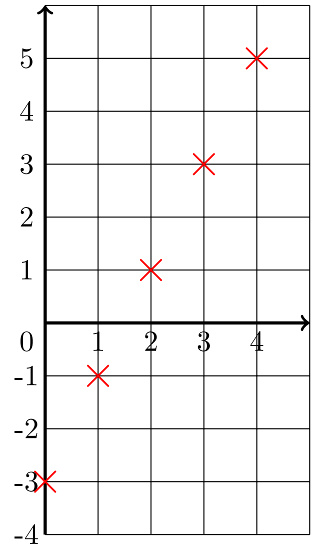
Le résultat dépend de n donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Propriété

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points tous alignés.

Remarque On retrouve l'allure de la représentation graphique d'une fonction affine. u_0 peut être assimilé à l'ordonnée à l'origine et r au coefficient directeur.

Exemple On donne ci-contre la représentation graphique de la suite arithmétique (u_n) telle que $u_0 = -3$ et de raison 2.



Théorème

Soit n un entier naturel non nul. On a la formule suivante :

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & n-1 & + & n \\
+ & & & & & & & & & & & \\
 & n & + & n-1 & + & n-2 & + & ... & + & 2 & + & 1 \\
\hline
= & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & ... & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

Ainsi, la double somme $1+2+3+...+n$ est égale à n fois $n+1$.
Pour obtenir le résultat de $1+2+3+...+n$ il faut donc diviser le précédent résultat par 2 soit $\frac{n(n+1)}{2}$.

Théorème

On peut aussi retenir les formules suivantes :

Si le premier terme est u_1 : $\quad u_1+u_2+...+u_n=n\times\frac{u_1+u_n}{2}$

Si le premier terme est u_0 : $\quad u_0+u_1+...+u_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$

2 Suite géométrique

Définitions

On dit qu'une suite est **géométrique** si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.
Si (v_n) est une suite géométrique, elle est donc définie par un v_0 et pour tout entier naturel n par $v_{n+1}=v_n\times q$ où q est un réel.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite (v_n).

Exemple La suite (v_n) des puissances de 2 est une suite géométrique.
Elle est définie par $v_0=1$ et pour tout entier $n\geqslant 1$ par $v_{n+1}=v_n\times 2$.
On a $v_0=1$, puis $v_1=v_0\times 2=2$, $v_3=v_2\times 2=4$, $v_4=v_3\times 2=8$ et ainsi de suite.

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $q \in \mathbb{R}$.

- Si $v_0 > 0$:
  Si $q > 1$ alors la suite (v_n) est croissante sur son ensemble de définition.
  Si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est décroissante sur son ensemble de définition.
- Si $v_0 < 0$:
  Si $q > 1$ alors la suite (v_n) est décroissante sur son ensemble de définition.
  Si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est croissante sur son ensemble de définition.

Remarque Si la raison d'une suite géométrique est négative alors elle n'est pas monotone. En effet, les termes seront de signe positif puis négatif une fois sur deux.

Théorème

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $q \in \mathbb{R}$. Pur tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

De façon générale, pour tous entiers naturel p et k :

$$v_p = v_k \times q^{p-k}$$

Démonstration Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q.

- Si $v_0 = 0$ ou si $q = 0$ alors tous les termes de la suite sont nuls.
- On suppose que $v_0 \neq 0$ et que $q \neq 0$.
  Puisque (v_n) est géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} = v_n \times q$.
  $v_1 = v_0 \times q$
  $v_2 = v_1 \times q = v_0 \times q \times q = v_0 \times q^2$
  $v_3 = v_2 \times q = v_0 \times q \times q^2 = v_0 \times q^3$
  ...
  $v_n = v_{n-1} \times q = v_0 \times q \times q^{n-1} = v_0 \times q^n$.

Remarque Grâce à ce théorème, on peut déterminer un terme d'une suite géométrique sans forcément connaître les précédents.

Exemples Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $-0,9$.
On souhaite calculer v_{42}.
$v_{42} = v_0 \times (-0,9)^{42} = 4 \times 0,9^{42} \approx 0,048$

Soit (v_n) une suite géométrique de raison 3 et telle que $v_6 = 9$. On souhaite déterminer v_{19}.
$v_{19} = v_6 \times 3^{19-6} = 9 \times 3^{13} = 14\ 348\ 907$.

Méthode : montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on calcule le quotient entre deux termes consécutifs quelconques $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Si le résultat est un nombre réel, il s'agit d'une suite géométrique dont la raison est le nombre réel trouvé.

Si le résultat dépend de n, ce n'est pas une suite géométrique.

Exemple La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$ est-elle géométrique ?

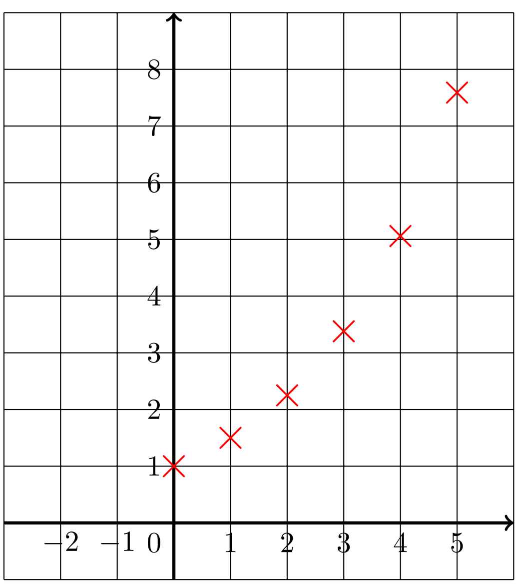
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{2^{2(n+1)}}{3^{3(n+1)}}}{\dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}} = \frac{2^{2(n+1)}}{3^{3(n+1)}} \times \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = \frac{2^{2n} \times 2^2}{3^{3n} \times 3^3} \times \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = \frac{4}{27}$$

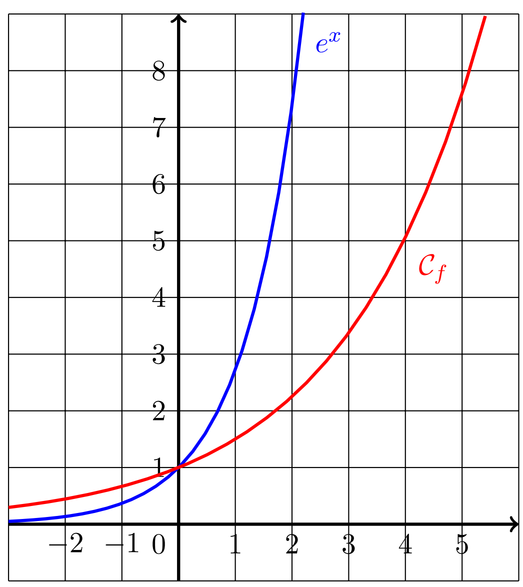
(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{27}$.

Propriété

La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points dont l'allure est celle de la représentation graphique d'une fonction exponentielle.

Exemple Ci-dessous à gauche, la représentation graphique de la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1,5^n$ et ci-dessous à droite, la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,5^x$ et celle de e^x.





Théorème

Soit n un entier naturel non nul et soit q un réel différent de 1. On a la formule suivante :

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration Soit n en entier naturel non nul et soir q un réel différent de 1.

Notons $S_n = 1 + q + q^2 + q^{n-1} + q^n$.

On a alors $q \times S_n = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$.

On soustrait les deux lignes et on obtient : $S_n - qS_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n - (q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1})$

Ce qui donne $S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$.

Puisque $q \neq 1$, on peut diviser par $(1 - q)$ qui est un réel non nul. On obtient alors $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.