Exercices sur les nombres complexes (4)

> Etudier des configurations du plan

Exercice n°1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$, on considère quatre points A, B, C et D d'affixes $z_A = 4 - \sqrt{3}i$, $z_B = 4 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$, $z_C = -1 + 2i$ et $z_D = 2\sqrt{3} - 1$.

1. Montrer que $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = -\dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice n°2 Soit $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$ les affixes de trois points A, B et C.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice n°3 On se place dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2i\sqrt{3}$.

1. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.
2. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

Exercice n°4 On se place dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

On considère quatre points A, B, C et H d'affixes respectives $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ et $h = -2$.

1. Placer les points sur une figure.
2. On appelle J le point d'affixe i. Montrer que J est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon de ce cercle.
3. Donner l'écriture algébrique du nombre $\dfrac{b - c}{h - a}$. Montrer alors que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice n°5 Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer :

1. L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
2. L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
3. L'ensemble des points M tels que $\dfrac{|z - i|}{|z|} = 2$.

> Etudier les racines de l'unité

Exercice n°6

1. Factoriser $z^4 - 1$ en produit de facteurs premiers.
2. En déduire les éléments de l'ensemble $\mathbb{U}_4$.

Exercice n°7

1. Donner l'interprétation géométrique des racines 5-ième de l'unité.
2. Déterminer la longueur d'un côté d'un pentagone inscrit dans le cercle trigonométrique.
3. Montrer que le périmètre d'un tel pentagone est égal à $10\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.