Nombre complexe : point de vue géométrique

1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition : affixe d'un point

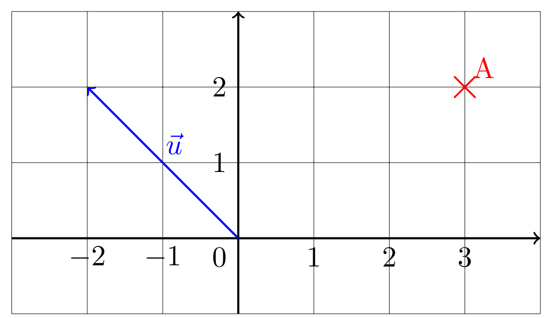
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle **image** de z le point M de coordonnées $(a\,;\,b)$.
z est alors appelé **l'affixe** du point M. On note $\mathrm{M}(z)$.

Définition : affixe d'un vecteur

A tout nombre complexe $z = a + ib$ on fait correspondre un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(a\,;\,b)$.
On dit que z est **l'affixe** du vecteur $\vec{v}$.

Exemple

Le nombre $z = 3 + 2i$ est l'affixe du point A.
L'affixe du vecteur $\vec{u}$ est $z' = -2 + 2i$.



Propriétés

On considère deux points M et N d'affixes respectives z_{M} et z_{N}. Soient $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ deux vecteurs du plan. Soit enfin k un réel.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{M}}$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz.
- Le milieu du segment [MN] a pour affixe $\frac{z_{\mathrm{M}+z_{\mathrm{N}}}}{2}$.

2 Module et argument

Définition : module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
Le nombre noté $|z|$ est appelé **module** de z et est défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

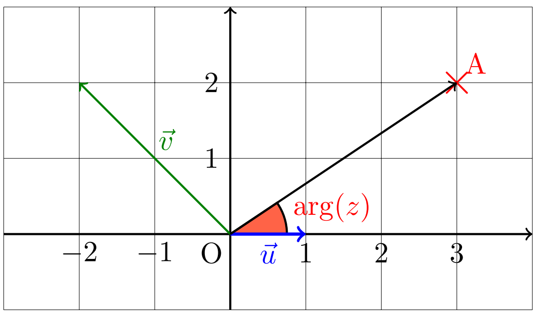
Définition : argument d'un nombre complexe

On considère un point M d'affixe z où z est un nombre complexe non nul.
On appelle **argument** de z une mesure, en radian, de l'angle $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM})$. On note alors $\arg(z)$.

Exemple

Le nombre $z = 3 + 2i$ est l'affixe du point A.
Son module est de $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
Il s'agit de la distance entre A et l'origine du repère.

On a également $|z'| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.
Il s'agit de la norme de $\vec{v}$.



Propriétés du module

Soit z un nombre complexe et $|z|$ son module.

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$

Démonstration

- $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Propriétés du module

Soient z et z' deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Produit du module : $|zz'| = |z| \times |z'|$

Puissance : $|z^n| = |z|^n$

Inverse : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Quotient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Démonstration

Pour le produit :

On pose $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$.

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= |z||z'|((\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta'))) \\ &= |z||z'|(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

Le module de zz' est donc $|z||z'|$.

Pour le module d'une puissance :

Initialisation

Pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z|^1$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 1$, on ait $|z^n| = |z|^n$.

$$\begin{aligned} |z^{n+1}| &= |z \times z^n| \\ &= |z| \times |z^n| \text{ d'après la propriété du produit} \\ &= |z| \times |z|^n \text{ par hypothèse de réccurence} \\ &= |z|^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rand $n + 1$.

Conclusion

La propriété est vraie pour un entier naturel $n \geqslant 1$ et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

3 Module et argument

Propriété - Définition : forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.
On pose $\arg(z) = \theta$ et $r = |z|$. On peut alors écrire z sous la forme :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Cette forme est appelée la **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Propriété : passer d'une forme à une autre

Si z s'écrit sous forme algébrique $z = a + ib$ et sous forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ alors :

- $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple

On a $z_1 = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Pour z_1 :

$a = 3 \times (\cos(\pi)) = -3$ et $b = 3 \times \sin(\pi) = 0$. Donc $z_1 = -3$.

Pour z_2 :

$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$; $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $z_2 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

4 L'ensemble $\mathbb{U}$

Définition : l'ensemble des nombres complexes de module 1

L'ensemble de tous les points du plan $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ dont l'affixe est un nombre complexe de module 1 est noté $\mathbb{U}$. Il s'agit du **cercle trigonométrique**.

Remarque

Un point $\mathrm{M}(z)$ appartenant à cet ensemble est de la forme $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Propriété : stabilité par produit et passage à l'inverse

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse. Cela signifie que si z et z' sont deux nombres complexes de $\mathbb{U}$ alors zz' et $\dfrac{1}{z}$ appartiennent à $\mathbb{U}$.

Démonstration

Produit :

$$\begin{aligned} |zz'| &= |z| \times |z'| \\ &= 1 \times 1 \text{ puisque les deux nombres complexes appartiennent à } \mathbb{U} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc zz' est de module 1, il appartient donc à $\mathbb{U}$.

L'inverse :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z}\right| &= \frac{1}{|z|} \\ &= \frac{1}{1} \text{ puisque } z \text{ appartient à } \mathbb{U}. \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{1}{z}$ est de module 1, il appartient donc à $\mathbb{U}$.