Les suites numériques - Partie n°2

1 Limite et comparaison

Théorème de minoration

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles qu'à partir d'un certain rang N : $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

Démonstration

Soit A un réel.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contiens toutes les valeurs u_n à partir d'un certain range p. Pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(p\,;\,N)$, on a $v_n \geqslant u_n > A$ et donc $v_n \in\,]A\,;\,+\infty[$. Cela revient donc à $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème de majoration

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles qu'à partir d'un certain rang N : $u_n \geqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

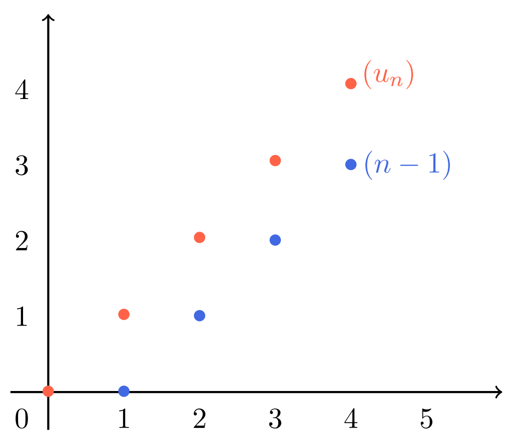
Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + \sin(n)$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sin(n) \geqslant -1$ donc $u_n \geqslant n - 1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



Théorème des gendarmes

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Soit N un entier naturel et soit l un réel.
Supposons, qu'à partir d'un certain rang N, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers le même réel l alors la suite (v_n) converge également vers cette limite l.

Exemple

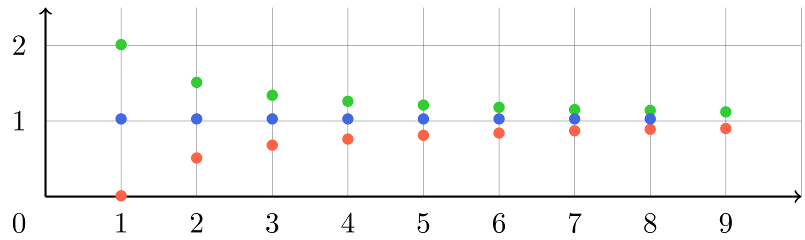
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$. On souhaite déterminer la limite de cette suite.

$-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{n} + 1 \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} + 1 \leqslant \dfrac{1}{n} + 1.$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + 1 = 1.$



Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

2 Suite majorée, minorée, bornée

Définition : suite majorée

On dit qu'une suite (u_n) est **majorée** par un réel M si pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant M$.

Définition : suite minorée

On dit qu'une suite (u_n) est **minorée** par un réel m si pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant m$.

Définition : suite bornée

On dit qu'une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

La suite $(\sin(n))$ est bornée car elle est majorée par 1 et minorée par -1.

Propriété

Si une suite (u_n) est croissante et converge vers un réel l alors (u_n) est majorée par l.

Théorème de convergence monotone

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

On montre par récurrence que cette suite est croissante sur $\mathbb{N}$.

Initialisation

$u_1 = \frac{8}{3} > u_0$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier n supérieur ou égal à 0, la proposition soit vraie.
On a donc $u_{n+1} > u_n$.

Donc $\frac{1}{3}u_{n+1} < \frac{1}{3}u_n$

Donc $\frac{1}{3}u_{n+1} + 2 < \frac{1}{3}u_n + 2$

$u_{n+2} < u_{n+1}$. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour un entier naturel $n \geqslant 0$ et héréditaire pour cet entier n. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

On montre également par récurrence que cette suite est majorée par 3.

Puisque que c'est une suite croissante et majorée alors c'est une suite convergente.

Remarque

Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite potentielle de la suite.
Dans l'exemple précédent, on sait que la limite sera inférieure ou égale à 3 mais rien n'est démontré.

Propriété

- Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration

Il faut montrer que pour tout réel A, il existe un rang N tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$.

Soit $A \in \mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe un rang N tel que $u_N \geqslant A$. Or cette suite est aussi croissante. Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$.
La suite est donc divergente vers $+\infty$.

3 Cas des suites géométriques

Théorème : limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite des puissances de $q \in \mathbb{R}$: $u_n = q^n$.

Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Si $q \leqslant -1$, la suite (u_n) diverge et n'admet pas de limite.

Démonstration

- Supposons que $q > 1$.

  On pose $q = 1 + a$ avec $a \in \mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Bernoulli (montrée dans la partie 1 de ce chapitre), pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \leqslant 1 + na$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

- Supposons que $-1 < q < 1$.

  Si $q = 0$, on obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

  Si $0 < q < 1$, $\dfrac{1}{q} > 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$ ce qui revient à $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{q^n} = +\infty$. Par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
  Si $-1 < q < 0$ alors pour tout entier naturel n, $-|q^n| \leqslant q^n \leqslant |q|^n$.
  Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} |q^n| = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

- Supposons que $q \leqslant -1$. Les valeurs de q^n appartiennent de façon alternée aux intervalles $]-\infty\,; -1]$ et $[1\,; +\infty[$. La suite n'a donc pas de limite.