Correction des exercices sur les nombres complexes (3)

> Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement

Exercice n°1

a. $z = 3e^{i\pi} = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3(-1 + i \times 0)$=-3.

b. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$

c. $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}\right) = 3 - i\sqrt{3}.$

Exercice n°2

a. $z = 5 = 5(\cos(0) + i\sin(0)) = 5e^{i0}.$

b. $-3 = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3e^{i\pi}.$

c. $-3i = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

d. $|z = |\sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Donc $z = 3\sqrt{2}\left(\frac{-3}{3\sqrt{2}} + i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Finalement, $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

e. $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$. Donc $z = 4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{4} - i\frac{2}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right).$

Finalement, $z = 4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

f. $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$. Donc $z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$

Finalement, $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice n°3

1. $\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = \bar{r} \times \overline{e^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ et $-z = -(re^{i\theta}) = e^{i\pi} \times re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$.

2. $2e^{-i\frac{\pi}{3}} = (-e^{i\pi})\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. $2e^{-i\frac{\pi}{3}} + 3e^{e\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 3e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

> Choisir une forme adaptée pour résoudre une problème

Exercice n°4

1. $|z_A| = \sqrt{3^3 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$ et $z_A = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

   Ainsi, $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   De la même façon, on montre que $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \alpha = \frac{\pi}{6}(2\pi)$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

   Or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

3. L'égalité $z_C = z_A + z_B$ traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, c'est à dire que OACB est un parallélogramme. D'après la question n°2, OAB est rectangle en O.
   De plus, $OA = |z_A| = 2\sqrt{3} = |z_B| = OB$. Cela montre que le triangle OAB est aussi isocèle. Finalement, OACB est un carré de côté $2\sqrt{3}$.

Exercice n°5

1. $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Notons α_1 l'argument de z_1. On a $\cos(\alpha_1) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ donc $z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Un argument de z_2 est donc $-\frac{\pi}{4}$.

3. $z_2 = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$.

   Donc $z_1z_2 = (1 + i\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i + 3\sqrt{6}i + 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + i(3\sqrt{6} - 3\sqrt{2})$.

4. $z_1z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 6e^{-i\frac{\pi}{4}} = 12e^{i\frac{\pi}{12}}$.

   Donc $z_1z_2 = 12\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

5. D'après les deux questions précédentes, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

> Utiliser les formules de Moivre et d'Euler

Exercice n°6

1. $$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \quad \text{D'après la formule d'Euler.}\\ &= \frac{1}{8}\left((e^{ix})^3+3(e^{ix})^2e^{-ix}+3e^{ix}(e^{-ix})^2+(e^{-ix})^3\right) \quad \text{en utilisant la formule du binôme de Newton}\\ &= \frac{1}{8}(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix})\\ &= \frac{1}{8}(\cos(3x)+i\sin(3x)+3\cos(x)+3i\sin(x)+3\cos(x)-3i\sin(x)+\cos(3x)-i\sin(3x))\\ &= \frac{1}{8}(2\cos(3x)+6\cos(x))\\ &= \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x)).\end{aligned}$$

2. Une primitive de $\cos^3(x)$ est également une primitive de $\frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{12}\sin\left(3\times\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{12}\sin(0)-\frac{3}{4}\sin(0)\\ &= \frac{-2+9\sqrt{3}}{24}\end{aligned}$$

Exercice n°7

1. D'après la formule de Moivre, on a :

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta).$$

D'autre part,

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta).$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta)=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$$

Soit par identification,

$$\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) \text{ et } \sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

2. D'après la formule de Moivre on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on a également :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)i\sin(\theta) + 3\cos(\theta)(i\sin(\theta))^2 + (i\sin(\theta))^3$$

Ce qui revient après simplification à

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta))$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta))$$

Soit par identification :

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) \text{ et } \cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$

3. D'après la formule de Moivre, on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a également :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 = \cos^4(\theta) + 4\cos^3(\theta)i\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta)$$

Par identification, on obtient donc :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \text{ et } \sin(4\theta) = 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$$

En simplifiant les expressions :

$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2$
On rappelle que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

Ce qui donne finalement $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$.