Correction des exercices sur les suites numériques

> Les différents modes de génération d'une suite

Exercice n°1

1. $u_2 = \dfrac{1}{2\times(2-1)} = \dfrac{1}{2}$ $\quad u_3 = \dfrac{1}{3\times(3-1)} = \dfrac{1}{6}$ $\quad u_4 = \dfrac{1}{4\times(4-1)} = \dfrac{1}{12}$

2. $v_0 = \dfrac{(-2)^{0-1}}{0+1} = -0,5$ $\quad v_1 = \dfrac{(-2)^{1-1}}{1+1} = 1$ $\quad v_2 = \dfrac{(-2)^{2-1}}{2+1} = -\dfrac{2}{3}$

3. $u_{10} = \dfrac{1}{10\times(10-1)} = \dfrac{1}{90}$ $\quad v_8 = \dfrac{(-2)^{8-1}}{8+1} = \dfrac{-128}{9}$

4. $u_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)(n-1-1)} = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$ $\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+1-1) = \dfrac{1}{n(n+1)}}$

   $v_{n-1} = \dfrac{(-2)^{n-1-1}}{n-1+1} = \dfrac{(-2)^{n-2}}{n}$ $\quad v_{n+1} = \dfrac{(-2)^{n+1-1}}{n+1+1} = \dfrac{(-2)^n}{n+2}$

Exercice n°2

1. C'est une suite définie par récurrence.
2. $u_0 = 2,5$
   $u_1 = -2\times u_0 + 2 = -3$
   $u_2 = -2\times u_1 + 2 = 8$
   $u_3 = -2\times u_2 + 2 = -14$

Exercice n°3

$u_0 = 2\times 0^2 - 15 = -15$ $\quad u_1 = 2\times 1^2 - 15 = -13$ $\quad u_2 = 2\times 2^2 - 15 = -7$

$v_0 = 2\times\dfrac{(-1)^0}{0+1} = 1$ $\quad v_1 = 2\times\dfrac{(-1)^1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad v_2 = 2\times\dfrac{(-1)^2}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

$w_0 = 4$ $\quad w_1 = 5 - 3\times w_0 = -7$ $\quad w_2 = 5 - 3\times w_1 = 26$

Exercice n°4

1. Il s'agit d'une suite définie par récurrence.
2. $u_0 = 5$
3. $u_2 = 10$ et $u_3 = -10$
4. $u_4 = -2\times u_3 + 10 = 30$

Exercice n°5

1. C'est une suite définie par récurrence telle que $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $u_{n+1} = 4 \times u_n - 6$.
2. $u_0 = 3$ et $u_1 = 4 \times u_0 - 6 = 6$
3. Le logiciel va donner la valeur de u_6 : 1 026.

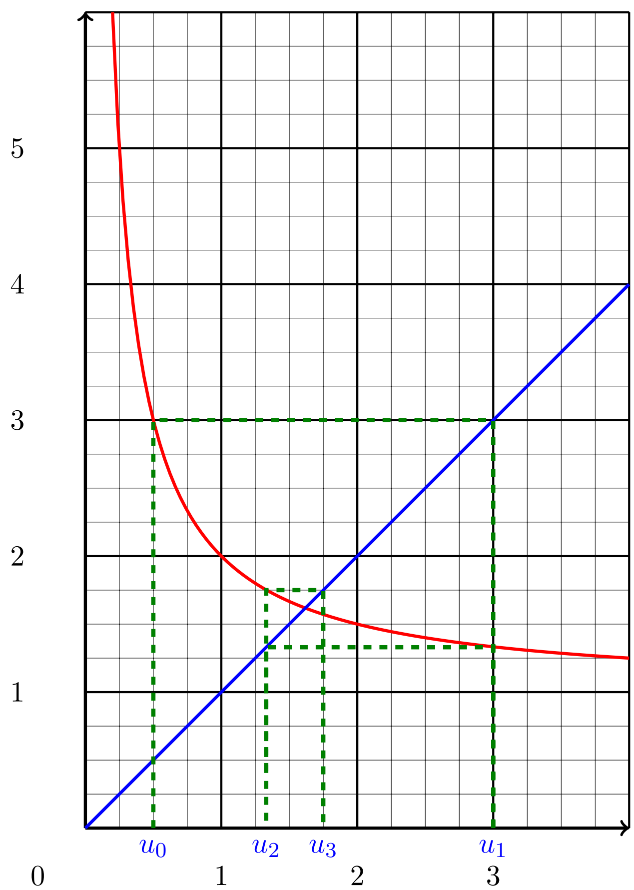
> Représentation graphique d'une suite

Exercice n°6

La représentation graphique de la suite (u_n) est la représentation n°3.
La représentation graphique de la suite (v_n) est la représentation n°1.
La représentation graphique de la suite (w_n) est la représentation n°2.
La représentation graphique de la suite (t_n) est la représentation n°4.

Exercice n°7

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$.
2. voir repère ci-dessous.
3. voir repère ci-dessous.



> Sens de variation d'une suite

Exercice n°8

1. $u_{n+1} - u_n = u_n + n^2 - u_n = n^2$
   $\forall\ n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant 0$. Donc $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 1$, et ainsi de suite. La suite (u_n) n'est donc pas monotone sur $\mathbb{N}$ et elle ne prend que deux valeurs : 3 et 1.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^x - 8$. Cette fonction est strictement croissante sur son ensemble de définition. Ainsi, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 0,5^x$. Cette fonction est strictement décroissante sur son ensemble de définition. Ainsi, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°9

1. **a.** $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) - 2 = 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 - 2 = 2n^2 + 3n - 1$
   b. $u_{n-1} = 2(n-1)^2 - (n-1) - 2 = 2n^2 - 2n + 2 - n + 1 - 2 = 2n^2 - 3n + 1$
   c. $u_n + 1 = 2n^2 - n - 2 + 1 = 2n^2 - n - 1$
   d. $u_{2n} = 2(2n)^2 - (2n) - 2 = 8n^2 - 2n - 2$
2. $u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 3n - 1 - (2n^2 - n - 2) = 2n^2 + 3n - 1 - 2n^2 + n + 2 = 4n + 1$.
3. $4n + 1$ est strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui veut dire que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
4. D'après les expressions trouvées à la question n°1, c'est vrai.
5. On doit saisir « =2*A3*A3-A3-2 ».

Exercice n°10

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= -2(n+1)^2 - 7(n+1) + 10 - (-2n^2 - 7n + 10) \\
&= -2(n^2 + 2n + 1) - 7n - 7 + 10 + 2n^2 + 7n - 10 \\
&= -2n^2 - 4n - 2 - 7n - 7 + 10 + 2n^2 + 7n - 10 \\
&= -4n - 9
\end{aligned}$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}, -4n - 9 < 0$ donc $\forall\ n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$ ce qui veut dire que (a_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \frac{n+1}{2} + \frac{2}{n+1} - \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{-2}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Puis $\frac{1}{2} + \frac{-2}{n(n+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{-2}{n(n+1)} \Leftrightarrow n(n+1) \geqslant 4 \Leftrightarrow n \geqslant 2$. La suite (b_n) est donc croissante à partir de $n = 2$.

$c_{n+1} - c_n = c_n - n^2 + 100 - c_n = -n^2 + 100$

$$\begin{aligned} & -n^2 + 100 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 100 \geqslant n^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 10 \geqslant n \text{ (car } n \geqslant 0) \end{aligned}$$

$c_{n+1} - c_n \geqslant 0$ si et seulement si $n \leqslant 0$. Ainsi, (c_n) est décroissante sur $[0\,;\,10]$ puis est croissante sur $[10\,;\,+\infty\,[$.

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\dfrac{4(n+1)}{1+n+1}}{\dfrac{4-n}{1+n}} = \frac{3-n}{n+2} \times \frac{1+n}{4-n} = \frac{(3-n)(1+n)}{(n+2)(4-n)}$$

$\dfrac{(3-n)(1+n)}{(n+2)(4-n)} < 1 \Leftrightarrow (3-n)(1+n) < (n+2)(4-n) \Leftrightarrow -,^2 +2n+3 < -n^2+2n+8 \Leftrightarrow 3 < 8.$

Cette dernière égalité est tout le temps vraie donc $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} < 1$ pour tout entier naturel n ce qui signifie que la suite (d_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°11

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 2x - 8$.
   f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -5, b = 2$ et $c = -8$.
   $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2}{-10} = \dfrac{1}{5}$.
   Puisque $a < 0$, f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{5}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$.
   Ainsi, la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = f(n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 9x^2$.
   f est continue et dérivable sur son ensemble de définition et pour tout réel x on a $f'(x) = 3x^2 - 18x$.

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \times 3 \times 0 = 324$.

   $\Delta > 0$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On trouve $x_1 = 0$ et $x_2 = 6$.
   Tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

   Ainsi, la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = f(n)$ est décroissante sur $[0\,;\,6]$ puis croissante sur $[6\,;\,+\infty\,[$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{1}{x}$.
   C'est une fonction continue et dérivable sur son ensemble de définition et pour tout x de cet ensemble on a $f'(x) = \dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{x^2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur son ensemble de définition. Ce qui signifie que la suite (c_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f(n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

> Notion de limite

Exercice n°12

Repère 1 : les termes v_n semblent tendre vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Repère 2 : les termes w_n semblent de rapprocher de plus en plus de 0 quand n devient de plus en plus grand. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Repère 3 : les termes u_n semblent tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Repère 4 : les termes t_n semblent tendre vers 2,5 quand n tend vers $+\infty$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 2,5$.

Exercice n°13

1. $v_1 = 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 9 = 8$
   $v_{100} = 3 \times 100^2 - 4 \times 100 + 9 = 29\ 609$
2. Il semble que v_n devienne de plus en plus grand quand n tend vers $+\infty$. On peut faire la même conjecture en représentant graphiquement, par un nuage de points, l'ensemble des $(n\,;\,v_n)$.

Exercice n°14

1. $u_0 = \dfrac{3\times 0 - 1}{0+4} = -\dfrac{1}{4}$ $u_1 = \dfrac{3\times 1 - 1}{1+4} = -\dfrac{2}{5}$ $u_2 = \dfrac{3\times 2 - 1}{2+4} = \dfrac{5}{6}$

   $u_3 = \dfrac{3\times 3 - 1}{3+4} = -\dfrac{8}{7}$ $u_4 = \dfrac{3\times 4 - 1}{4+4} = -\dfrac{11}{8}$

2. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3(n+1)-1}{n+1+4}}{\dfrac{3n-1}{n+4}}$$

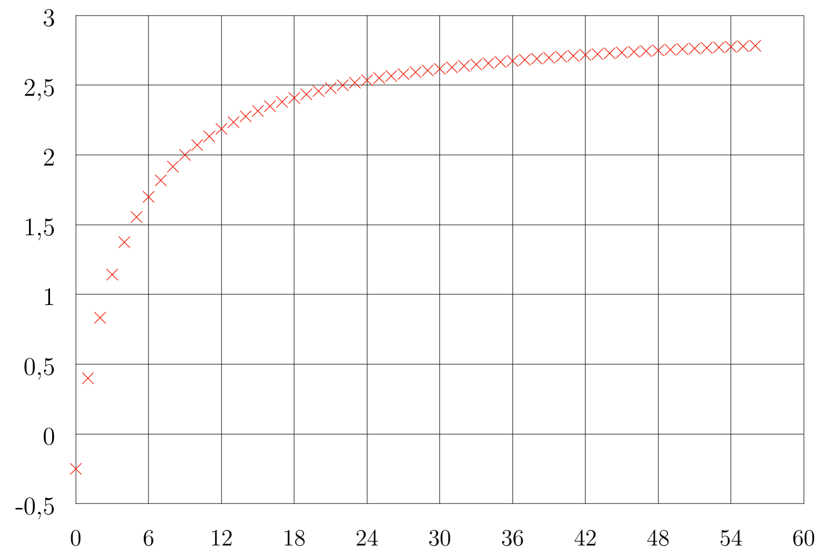
   $$= \frac{3(n+1)-1}{n+1+4} \times \frac{n+4}{3n-1}$$

   $$= \frac{3n^2+12n+2n+8}{3n^2-n+15n-5}$$

$$= \frac{3n^2 + 14n + 8}{3n^2 + 14n - 5}$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $3n^2 + 14n + 8 > 3n^2 + 14n - 5$. Donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. La suite (u_n) est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

3. A l'aide de la calculatrice, on représente l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.



Il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice n°15

1. $u_0 = \dfrac{2^0}{0+1} = 1$ $\qquad u_1 = \dfrac{2^1}{1+1} = 1$ $\qquad u_2 = \dfrac{2^2}{2+1} = \dfrac{4}{3}$ $\qquad u_3 = \dfrac{2^3}{3+1} = 2$

2. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1+1}}{\dfrac{2^n}{n+1}}$$

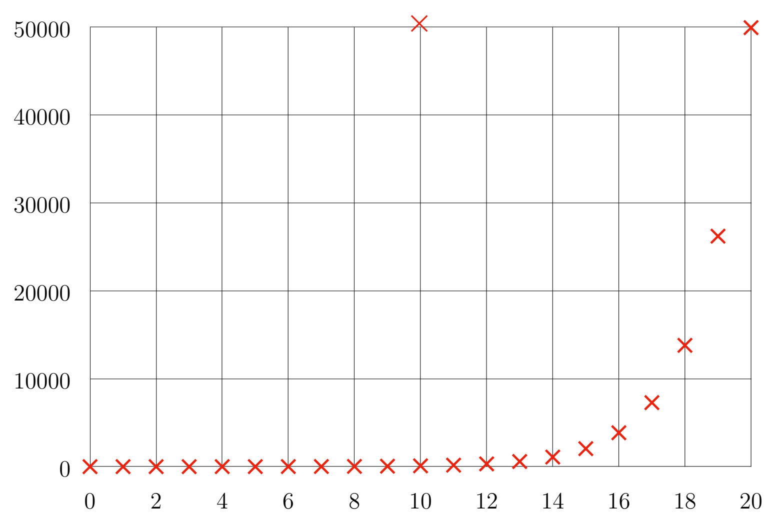
$$= \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n}$$

$$= \frac{2(n+1)}{n+2}$$

$$= \frac{2n+2)}{n+2}$$

Pour $n = 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Mais $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.

3. A l'aide de la calculatrice, on représente l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
Il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



> Exercice type problème

Exercice n°16

1. Programme Python complet pour afficher les termes u_n.

```
def suite(n):
    u=2
    for i in range (1,n+1):
        u=2*u+1
    return(u)
```

2. Si l'utilisateur saisi $n = 5$, le programme va renvoyer u_{n+1} soit u_6. On obtient alors $u_6 = 186$.

3. Programme Python modifié :

```
def suite(S):
    u=2
    n=0
    while u<S :
        u=2*u+1
        n=n+1
    return(n)
```

4. A l'aide du précédent programme, $u_n > 5\ 000$ à partir de $n = 11$.

Exercice n°17

1. $2\ 500 \times 1,02 = 2\ 550$. Au bout d'un an, Jean-Kevin aura 2 550€ sur son compte.
2. $2\ 550 \times 1,02 = 2\ 601$. Au bout de deux ans, Jean-Kevin aura 2 601€ sur son compte.
3. u_0 =2 500.
4. $u_{n+1} = 1,02 \times u_n$. C'est une suite définie par récurrence.
5. On peut s'aider d'un programme Python :

```
def suite(S):
    u=2 500
    n=0
    while u<S :
        u=1.02*u
        n=n+1
    return(n)
```

Le programme nous retourne 36. Il aura donc doublé son épargne initiale au bout de 36 ans.

Exercice n°18

1. $u_0 = 192$ C'est son rythme cardiaque au moment de la fin de son effort.
2. $u_1 = 0,82u_0 + 2 = 159,44$
   $u_2 = 0,82u_1 + 2 = 132,7408$. Au bout de deux minutes, son rythme cardiaque est d'environ 133 bpm.
3. Voici le programme Python utilisé :

```
def suite(S):
    u=192
    n=0
    while u>S :
        u=0.82*u + 2
        n=n+1
    return(n)
```

Jean-Kevin aura retrouvé son rythme cardiaque au repos au bout de 7 minutes.