

Correction : continuité des fonctions

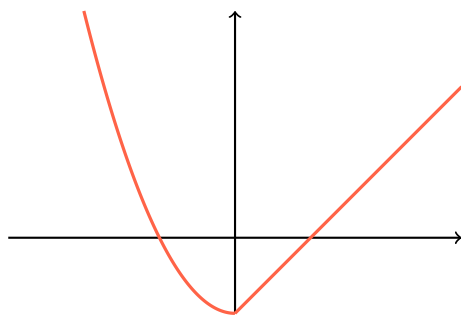
> Etudier la continuité d'une fonction

Exercice n°1

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2$.
Ainsi, pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que $m = -2$.

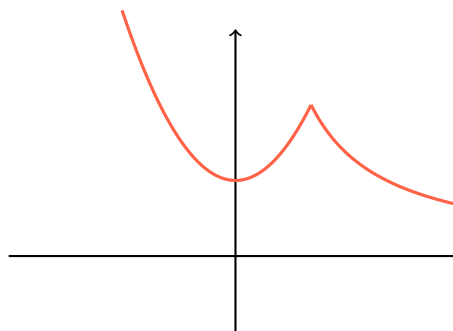
Exercice n°2

1. Courbe représentative de la fonction f :



La courbe représentative de la fonction f ne présente pas de saut.
 f est donc bien continue sur $\mathbb{R}$.

2. Courbe représentative de la fonction f :



La courbe représentative de la fonction f ne présente pas de saut.
 f est donc bien continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°3

Sauf en 3 et en 5, les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$. Etudions les limites en 3 et en 5.

$\lim_{x \rightarrow 3} -x + 2 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 3} 3x - 4 = -1$. La fonction f est donc continue en 3.

$\lim_{x \rightarrow 5} 5x - 4 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 5} 5 - 2x + 13 = 3$. La fonction f n'est donc pas continue en 5 donc n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

> Etude des équations du type $f(x) = k$

Exercice n°4

1. $f(0) = 0^5 - 5 \times 0 + 2 = 2$ et $f(1) = 1^5 - 5 \times 1 + 2 = -2$.

2. f est continue sur $[0; 1]$ en tant que fonction polynomiale et $f(1) = -2$ et $f(0) = 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un réel k de $[0; 1]$ tel que $f(k) = 0$.

Exercice n°5

1. $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$.

Cette dérivée s'annule en 0 et en $\frac{2}{3}$. On obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow -1$	$\searrow -\frac{31}{27}$	$\nearrow +\infty$	

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.

2. A la calculatrice, on trouve $1,46 \leq x \leq 1,47$.

Exercice n°6

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{3} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3} = +\infty$.

2. $f'(x) = 2x^2 - x - 1$ qui s'annule en -1 et $\frac{1}{2}$ (après avoir calculé le discriminant). On obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow \frac{17}{6}$	$\searrow \frac{59}{24}$	$\nearrow +\infty$	

3. $\frac{17}{6} \approx 2,83$ et $\frac{59}{24} \approx 2,45$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il n'y a qu'une seule solution à l'équation $f(x) = 2$ et elle se situe sur l'intervalle $] -\infty; -1]$.

Exercice n°7

1. $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2$.

2. $f''(x) = 12x^2 + 18x = 6x(2x + 3)$. Ce polynôme s'annule en 0 et en $-\frac{3}{2}$. On obtient le tableau de variation de f' :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	$-\infty$	$\frac{35}{4}$	2	$+\infty$	

3. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et elle se situe sur l'intervalle $\left] -\infty ; -\frac{3}{2} \right[$.
A la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -2,3$.
4. Sur $] -\infty ; -2,3[$, $f'(x) < 0$ et sur $[-2,3 ; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$.
5. D'après la question précédente, f est strictement décroissante sur $] -\infty ; -2,3[$ puis croissante sur $[-2,3 ; +\infty[$.

Exercice n°8

1. Il faut que $x^2 - 1$ soit positif pour que la racine carrée soit définie. Autrement dit, il faut que $x \in] -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$.
Ensuite, il faut que le dénominateur soit différent de 0. Donc que $x \neq -1$.
Finalement, l'ensemble de définition de f est $] -\infty ; -1[\cup [1 ; +\infty[$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 1}{x + 1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2 - 1} - 1 = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 0^- \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

Afin d'éviter des indéterminations, on doit transformer l'expression de $f(x)$.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} - 1}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, on obtient $\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Sur l'intervalle $] -\infty ; -1[$, on trouve comme expression $f(x) = -\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ car $|x| = -x$ sur cet intervalle. Or

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\infty 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

3. La courbe représentative de la fonction f admet alors trois asymptotes :

Une horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$, une autre horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -1$ et une verticale en -1 d'équation $x = -1$.

4. Calcul de $f'(x)$:

On pose $u(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$ et $v(x) = x + 1$. On a donc $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ et $v'(x) = 1$.

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \times (x + 1) - (\sqrt{x^2 - 1} - 1) \times 1}{(x + 1)^2} = \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}}{(x + 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Sur $[1; +\infty[$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. Donc f' est strictement positive ce qui signifie que f est strictement croissante sur cet intervalle.

On a de plus $f(1) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. La fonction f étant continue sur cette intervalle comme quotient de fonctions continues, et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$.

A la calculatrice, on trouve comme solution $x \approx 1,41$.

> Etude de suites

Exercice n°9

1. Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

$u_0 \in]0; 1[$ donc $u_0 > 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geq 0$, $u_n > 0$.

Donc $\frac{u_n}{2} > 0$ et donc $\frac{u_n^2}{4} > 0$ donc $\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour cet entier. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n .

2. Un raisonnement par récurrence analogue permet de montrer que $u_n \leq 1$.

$$3. u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} - u_n = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n).$$

Puisque $0 < u_n \leq 1$ alors $-2 \leq -2 + u_n \leq -1 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

(u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a donc $f(l) = l$ ce qui revient à $l = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4}$ ce qui est équivalent à $l(-2 + l) = 0$. Soit $l = 0$ soit $l = 2$. Mais puisque $u_n \leq 1$, $l = 0$.

Exercice n°10

1. On pose $u(x) = 3x + 2$ et $v(x) = x + 4$. On a donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{10}{(x+1)^2}. \text{ Pour tout réel } x \in I, f'(x) > 0.$$

On a donc le tableau suivant :

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	$\frac{1}{2}$	1

Ainsi, $f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et donc $f(x) \in I$.

2. Initialisation

$$u_0 = 0 \in I.$$

Hérédité

Supposons que pour un entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.

On a donc $2 \leq 3u_n + 2 \leq 5$ et $4 \leq u_n \leq 5$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} \leq 1$ ce qui revient à $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour un entier $n \geq 0$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n et on a en particulier : $u_n \in I$.

$$3. \quad u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}.$$

$$\frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4} = \frac{u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ alors $(1 - u_n)(u_n + 2) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

4. (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers un réel l .

Puisque f est continue et que $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $f(l) = l$.

$\frac{3l+2}{l+4} = l \Leftrightarrow 3l+2 = l(l+4) \Leftrightarrow l^2 + l - 2 = 0$. C'est une équation du second degré. Les deux solutions réelles sont -2 et 1 . Puisque $u_n > 0$ alors la limite de cette suite est 1 .

Exercice n°11

1. $u_1 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{11}{5} \right) = \frac{18}{5}$ et $u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18} \right) = \frac{599}{180}$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{11}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 11}{2x^2} = \frac{(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})}{2x^2}.$$

Pour tout réel $x \geq \sqrt{11}$, $f'(x) \geq 0$. La fonction f est donc croissante sur cet intervalle.

3. Initialisation

$u_0 = 5$, $u_1 = 3,6$ et $\sqrt{11} \approx 3,32$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geq 0$, $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

La fonction f étant croissante sur $[\sqrt{11}; +\infty[$ alors $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(\sqrt{11})$ et donc $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{11}$.

La proposition est héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{11}$. Elle converge donc.

5. La fonction f étant continue (puisque dérivable) sur $[\sqrt{11}; +\infty[$ et comme $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $f(\alpha) = \alpha$.

$$\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{11}{\alpha} \right) = \alpha \Leftrightarrow \alpha + \frac{11}{\alpha} = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = 11.$$

$\alpha = \sqrt{11}$ ou $\alpha = -\sqrt{11}$. Mais comme $\alpha \geq \sqrt{11}$ alors la limite de cette suite est $\sqrt{11}$.