Probabilités conditionnelles et indépendance

Dans ce chapitre, A et B seront des évènements de probabilité non nulle.

1 Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux évènements.
On appelle **probabilité conditionnelle** de l'évènement B sachant A la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé.
On note $P_A(B)$ et on lit « Probabilité de B sachant A ».

Remarque

On rappelle qu'une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. C'est également valable pour les probabilités conditionnelles : $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.

Exemple : Déterminer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau

L'association sportive du lycée du Jean-Kevin propose du Futsal et du Badminton. Le tableau suivant donne la répartition des élèves inscrits pour l'année scolaire en cours :

	Futsal	**Badminton**	**Total**
Garçons	383	291	674
Filles	72	54	126
Total	455	345	800

Un des inscrits sera tiré au sort pour gagner des places pour la prochaine coupe du monde de rugby.
On note les évènements suivants : A : « L'élève tiré au sort fait du futsal » et G : « L'élève tiré au sort est un garçon ».

1. Déterminer $P(A)$, $P(G)$, $P(G \cap A)$ et $P(\overline{G} \cap A)$.
2. Quelle est la probabilité que l'élève fasse du futsal sachant que c'est un garçon ?
3. Quelle est la probabilité que l'élève choisi fasse du badminton sachant que c'est une fille ?

Correction

1. $p(A) = \dfrac{455}{800}$, $P(G) = \dfrac{674}{800}$, $P(G \cap A) = \dfrac{383}{800}$ et $P(\overline{G} \cap A) = \dfrac{72}{800}$
2. $P_G(A) = \dfrac{383}{674}$ On ne regarde que les élèves garçons.
3. $P_{\overline{G}}(\overline{A}) = \dfrac{54}{126}$ On ne regarde que les élèves filles.

Propriété

Soient A et B deux évènements. La probabilité de l'évènement B sachant A est donnée par la formule suivante :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple

Dans un jeu de 32 cartes, on prend une carte au hasard. On considère les deux évènements suivants :
A : « La carte tirée est un pique » et B : « La carte tirée est une dame ».

On veut calculer $P_A(B)$.

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. De plus, $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ car il n'y a qu'une seule dame de pique. Ainsi :

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Ce qui est logique car parmi les 8 piques, il n'y a qu'une seule dame.

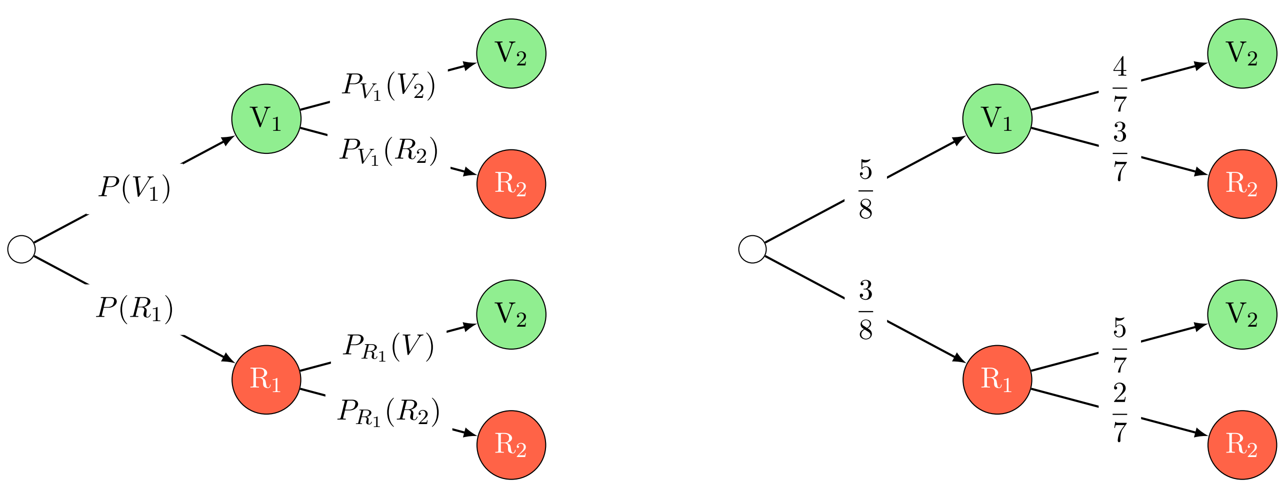
2 Probabilités totales et arbre pondéré

Définition

Un **arbre pondéré** est un schéma qui permet de représenter une succession d'expériences aléatoires. Sur cet arbre sont présents les probabilités de chacun des évènements ainsi que les probabilités conditionnelles.

Exemple

Dans une urne, il y a 3 boules rouges et 5 boules vertes. Un tire au hasard une première boule de l'urne, sans la remettre puis on tire une seconde boule. On regarde ensuite les deux boules obtenues.
On note V : « On pioche une boule verte » et R : « On pioche une boule rouge ». On peut ainsi représenter cette expérience aléatoire à l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous :



Propriétés

- Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.

On peut aussi retenir : $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple

On reprend le précédent exemple de l'urne. On souhaite déterminer la probabilité de piocher deux boules vertes.

Il faut donc regarder la première branche de notre arbre : $\dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{20}{56}$.

Définition

On considère un entier naturel n différent de 0.
On appelle **partition de l'univers** Ω la liste des évènements A_1, A_2, A_3, ..., A_n tels que :

- La probabilité de chacun de ces évènements est différente de 0.
- Les évènements A_1, A_2, A_3, ..., A_n sont disjoints deux à deux
- La réunion des évènements A_1, A_2, A_3, ..., A_n forment l'univers Ω.

On parle aussi de **système complet d'évènements**.

Propriété

Soient A_1, A_2, ..., A_n des évènements formant une partition d'un univers et soit B un évènement.
On a : $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$
que l'on peut aussi écrire : $P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + ... + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$.

C'est la formule des **probabilités totales**.

Exemple

On souhaite déterminer la probabilité de piocher au moins une boule verte de l'arbre de l'exemple précédent.
Il faut donc regarder les trois premières branches de notre arbre, où il y a eu au moins une boule verte de tirée.

Deuxième branche de l'arbre : $\dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{56}$

Troisième branche de l'arbre : $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{15}{56}$

On additionne ensuite ces trois probabilités : $\dfrac{20}{56} + \dfrac{15}{56} + \dfrac{15}{56} = \dfrac{50}{56}$.

La probabilité de tirer au moins une boule verte sur les deux tirages est de $\dfrac{50}{56}$ soit environ 89%.

3 Indépendance de deux évènements

Définition

Soient A et B deux évènements.
On dit que A et B sont **indépendants** quand $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque

Cela veut donc dire que les évènements A et B peuvent se produire indépendamment l'un de l'autre. Les résultats de A n'impactent pas ceux de B et inversement.

Propriété

Soient A et B deux évènements.

$$\begin{aligned} \text{A et B sont indépendants} &\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \\ &\Leftrightarrow P_B(A) = P(A) \end{aligned}$$

Démonstration

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) &\Leftrightarrow P_A(B) \times P(A) = P(A) \times P(B) \\ &\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \quad \text{On peut diviser par } P(A) \text{ car A est de probabilité non nulle.} \end{aligned}$$

On procède de même pour montrer la deuxième formule.

Exemple

Dans une population donnée, un individu peut attraper la gastro avec une probabilité de 0,005 et peut attraper un rhume avec une probabilité de 1%. On choisi une personne au hasard dans cette population et on note les évènements suivants :

G : « la personne a la gastro »
R : « la personne est enrhumée »

On suppose que ces deux évènements sont indépendants. Quelle est la probabilité que Jean-Kevin, qui fait parti de cette population, possède au moins une de ces deux maladies ?

Cela correspond à la probabilité de $G \cup R$.

$$\begin{aligned} P(G \cup R) &= P(G) + P(R) - P(G \cap R) \\ &= P(G) + P(R) - P(G) \times P(R) \quad \text{puisque G et R sont indépendants} \\ &= 0,005 + 0,01 - 0,005 \times 0,01 \\ &= 0,01495 \end{aligned}$$

La probabilité que Jean-Kevin attrape au moins l'une des deux maladies est de 1,495%.

Propriété

Soients A et B deux évènements.
Si A et B sont indépendants alors $\overline{\text{A}}$ et B le sont également.

Démonstration

Puisque A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(B) + P(A \cap \overline{B})$.
Ce qui est équivalent à $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A) \times P(B) = (1 - P(B)) \times P(A) = P(\overline{B}) \times P(A)$.

A et $\overline{\text{B}}$ sont donc indépendants.

Exemple

Jean-Kevin joue à deux jeux de hasard. Au premier jeu, il a une probabilité de gagner de 5%. Sur le deuxième jeu, il peut gagner avec une probabilité de 8%. On note les évènements suivants :

A : « On gagne au premier jeu »
B : « On gagne au deuxième jeu »

On suppose que les deux jeux sont indépendants. Quelle est la probabilité que Jean-Kevin perde au premier jeu mais gagne au deuxième ?

Il s'agit de calculer la probabilité de $\overline{\text{A}} \cap \text{B}$. Puisque A et B sont indépendants alors $\overline{\text{A}}$ et B aussi. Ainsi :
$P\overline{A} \cap B = P(\overline{A}) \times P(B) = 0,95 \times 0,08 = 0,076$.
La probabilité que Jean-Kevin perde au premier jeu mais gagne au deuxième est donc de 7,6%.