Correction : limites de fonctions

> Déterminer des limites de fonctions usuelles

Exercice n°1

a. $\dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$.

Exercice n°2

1. $f'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$.

   De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x^2}{x^2} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{x^2} = -1$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

2. D'après le précédent tableau, pour tout réel x on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   f est donc bornée.

Exercice n°3

1. Il semble que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et

   que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. A partir de la représentation graphique, on obtient :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

> Opérations sur les limites

Exercice n°4

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$.

   $\lim\limits_{x\to1^+} x-2 = -1$ et $\lim\limits_{x\to1^+} x-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to1^-} x-2 = -1$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x-1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$.

Exercice n°5

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x-5 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to3^-} 1-2x = -5$ et $\lim\limits_{x\to3^-} x-3 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{1-2x}{x-3} = +\infty$

> Lever des indéterminations

Exercice n°6

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^2+2x^2-6x+1 = \lim_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$$

Exercice n°7

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{4x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{4} = -\infty$$

Exercice n°8

On utilise l'expression du conjugué.

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}.$$

$$\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.$$

> Composition de fonctions

Exercice n°9

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5}{4x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$.

Puis $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+5}{4x+1}} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Puis $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{x} = 2$.

Puis $\lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2-\dfrac{1}{x}} = \sqrt{2}$.

Exercice n°10

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$. Puis $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x+e^{-3x} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1$. Puis $\lim\limits_{X\to 1} e^X = e$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e$.

> Utiliser les théorèmes de comparaison, d'encadrement et de croissance comparée

Exercice n°11

a. Pour tout réel x : $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $x-1 \leqslant x+\sin(x) \leqslant 1+x$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin(x) = +\infty$.

b. Pour tout réel x : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-x \leqslant x\cos(x) \leqslant x$. Puisque $x^2+1>0$ on a $\dfrac{-x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0$.

Exercice n°12

1. Pour tout réel x : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $1 \geqslant -\cos(x) \geqslant -1$ puis $3 \geqslant 2-\cos(x) \geqslant 1$.

   Finalement, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1$.

2. Puisque pour tout réel x on a $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1$ alors $\dfrac{x}{3} \leqslant \dfrac{x}{2-\cos(x)} \leqslant x$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)} = +\infty$.

   Pour tout réel x : $x-1 \leqslant x+\cos(x) \leqslant x+1$. Ainsi, $x-1 \leqslant \dfrac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)} \leqslant \dfrac{x+1}{3}$.

   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{3} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)} = -\infty$.

Exercice n°13

a. $\dfrac{e^x+3}{x^3} = \dfrac{e^x}{x^3} + \dfrac{3x}{x^3}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3x}{x^3} = +\infty$.

b. $(x^2+4x-1)e^x = e^x x^2 + e^x 4x - e^x$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x 4x = 0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+4x-1)e^x = 0$.

c. $\dfrac{e^x+x}{e^x-x^2} = \dfrac{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{x^2}{e^x}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{x^2}{e^x}}$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x}{e^x-x^2} = 1$.

> Problèmes de synthèse

Exercice n°14

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-1} x^2+2x+5 = 4$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} x+1 = 0^+$. Donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

   On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

3. $d(x) = f(x) - (x+1) = \dfrac{x^2+2x+5}{x+1} - (x+1) = \dfrac{x^2+2x+5-(x+1)^2}{x+1} = \dfrac{4}{x+1}$.

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$.

   Cela signifie que plus x devient grand, plus $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_f$ sont proches.

4. Pour tout réel $x > -1$, $d(x) > 0$ donc $f(x) - (x+1) > 0$ ce qui signifie que $f(x) > (x+1)$.
   $\mathcal{C}_f$ est donc au dessus de $\mathcal{D}$.

Exercice n°15

1. $P'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$. On obtient donc le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

2. $f'(x) = \dfrac{1(x^3-1) - (x+1)3x^2}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-2x^3-3x^2-1}{(x^3-1)^2} = \dfrac{P(x)}{(x^3-1)^2}$.

   Donc $f'(x)$ est du signe de $P(x)$. D'après la question précédente, f est strictement croissante sur $[\alpha\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$.

Exercice n°16

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$. De la même façon, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

   Ainsi, $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

2. $f(x) - 3 = \dfrac{3x^2-4}{x^2-1} - 3 = \dfrac{-1}{x^2-1}$.

   Pour tout x dans $]-\infty\,;\,-1[$ U $]1\,;\,+\infty[$, $x^2 - 1 > 0$. Et pour tout $x \in\,]-1\,;\,1[$, $x^2 - 1 < 0$. Donc $-\dfrac{-1}{x^2-1} < 0$ sur $]-\infty\,;\,-1[$ U $]1\,;\,+\infty[$ et $\dfrac{-1}{x^2-1} > 0$ sur $]-1\,;\,1[$;

   Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de cette asymptote horizontale sur $]-1\,;\,1[$ et en dessous sinon.

3. $\lim\limits_{x \to 1^+} 3x^2 - 4 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 1 = 0^+$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

4. $\mathcal{C}_f$ possède donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. $\lim\limits_{x \to -1^+} 3x^2 - 4 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - 1 = 0^+$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Ce qui prouve bien que $\mathcal{C}_f$ possède une autre asymptote verticale, cette fois d'équation $x = -1$.