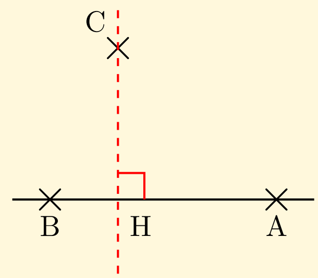
# Produit scalaire (2)

## 1 Produit scalaire et orthogonalité

**Définition**

On appelle **projeté orthogonal** d'un point C sur une droite (AB) le point d'intersection de (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par C.

Ci-contre, H est le projeté orthogonal de C sur (AB).




**Propriété**

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

**Démonstration**

- Si l'un des deux vecteurs est nul alors sa norme l'est aussi. La démonstration est donc triviale.
- Supposons que les deux vecteurs ne soient pas nuls.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)\end{aligned}$$

**Propriété**

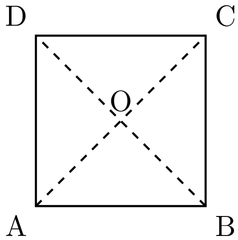
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraires.

**Démonstration** Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}) \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} \qquad \text{Relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} \quad \text{Puisque } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HC} \text{ sont orthogonaux.} \\
&= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}) \\
&= \pm AB \times AH \qquad \text{Selon les sens des deux vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

**Exemples**




On considère le carré ABCD de côté 4 cm et de centre O.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = AB \times AI = 4 \times 2 = 8$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times AB = -4 \times 4 = -16$

# 2 Produit scalaire et cercle

**Propriété**

Soient A et B deux points distincts du plan.
Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

**Démonstration** Notons O le milieu de [AB].

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}) = 0 \qquad \text{car O est le milieu de [AB].} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2 = 0 \qquad \text{identité remarquable} \\
&\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow MO^2 = OA^2 \\
&\Leftrightarrow MO = OA \qquad \text{Puisque que ce sont des longueurs, donc des grandeurs positives.} \\
&\Leftrightarrow \text{M appartient au cercle de rayon [OA], donc de diamètre [AB].}
\end{aligned}$$

**Exemple**

On considère deux points A et B distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points P tels que $PB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB}$.

$$\begin{aligned}
&PB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB}. \\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{PB}.(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{AB}) = 0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PB}.(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PA} = 0$

Il s'agit du cercle de diamètre [AB].

## 3 Produit scalaire et coordonnées

**Propriété**

On se donne deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs peut alors être déterminé de la façon suivante :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_A \times x_B + y_A \times y_B$$

### Exemples

- Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 \times (-1) + 3 \times 2 = 5$.

- Soient A(2 ; 1), B(5 ; 3), C(1 ; 4) et D(5 ; −2). Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?
  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5-1 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
  Puis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 3 \times 4 + 2 \times (-6) = 0$. Les deux vecteurs sont donc orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

**Synthèse des formules**

Pour résoudre un problème à l'aide du produit scalaire, on peut maintenant faire appel aux formules suivantes :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \pm\ AB \times AH \quad \text{où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = x \times x' + y \times y' \quad \text{avec } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$