# Correction : fonctions trigonométriques

## > Résoudre des équations et des inéquations

### Exercice n°1

**a.** $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

**b** $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\pi + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**c.** $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{2\pi}{3} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**d.** $\sin(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**e.** $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

### Exercice n°2

**a.** $2\cos(x) \times (\sin(x) + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -1$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi).$

**b.** $(3\sin(x) + 6)(\cos(x) + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin(x) + 6 = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x) = -2 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -1$

$\Leftrightarrow \quad \text{impossible} \quad \text{ou} \quad x = \pi\ (2\pi)\ \text{ou}\ x = -\pi\ (2\pi)$

**c.** $2\sin(x)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x)^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi) \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi) \quad \text{et} \quad x = -\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi) \quad x = -\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

## Exercice n°3

$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2(x) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos^2(x) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$

Cela donne donc $x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$ que l'on peut simplifier par $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

## Exercice n°4

1. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   On regarde la partie du cercle trigonométrique telle que $\cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $\mathcal{S} = \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right[$.

2. On sait que $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   On regarde la partie du cercle trigonométrique telle que $\sin(x) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, $\mathcal{S} = \left[-\pi ; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} ; \pi\right]$.

3. $\cos^2(x) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \cos(x) < \frac{1}{2}$.

   On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

   Ainsi, $\mathcal{S} = \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[ \cup \left]-\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3}\right[$.

4. On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $\mathcal{S} = \left[-\pi ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$.

## > Calcul de dérivées

## Exercice n°5

**a.** La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ et la dérivée de $x \mapsto \cos(x)$ est $x \mapsto -\sin(x)$.

Ainsi, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\sin(x)$.

**b.** $f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

**c.** On pose $v(x) = \cos(x)$. Donc $v'(x) = -\sin(x)$. D'où $f'(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$

## Exercice n°6

**a.** $f'(x) = 2\cos(2x)$.

**b.** $f'(x) - 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

**c.** $f'(x) = -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

## > Etude des fonctions trigonométriques

### Exercice n°7

1. $f$ est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.
   De plus, les fonctions cosinus et sinus sont $2\pi$-périodiques donc pour tout réel $x$ : $f(x+2\pi) = f(x)$.
   On peut donc se limiter à l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ pour l'étude de la fonction $f$.

2. $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$.

3. Si $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{5\pi}{4}\,;\,2\pi\right]$ alors $\cos(x) > \sin(x)$ et donc $f'(x) > 0$.

   Si $x \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right[$ alors $\sin(x) > \cos(x)$ donc $f'(x) < 0$. On obtient donc le tableau de variations suivants :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $-\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $1$ |

### Exercice n°8

1. Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $f$ l'est aussi.

2. $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)} = f(x)$. La fonction $f$ est donc $2\pi$-périodique.

   $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$. La fonction $f$ est donc impaire : sa courbe représentative possède un centre de symétrie qui est l'origine du repère.

3. On pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 2+\cos(x)$. On a donc $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$. Ainsi :

   $$f'(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) + \cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1+2\cos(x)^2}{\cos(x)^2}.$$

4. $1 + 2\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$.

   Sur $\left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$, $\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$ donc $1+2\cos(x) \geqslant 0$.

   Sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, $\cos(x) \leqslant -\frac{1}{2}$ donc $1+2\cos(x) \leqslant 0$.

5. On obtient le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\searrow$ | $0$ |