Vecteurs, droites et plans : approfondissement

Barycentre d'un système de points pondérés

Définition

Soient (A, α), (B, β) et (C, γ) trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
On appelle **barycentre** des trois points (A, α), (B, β) et (C, γ) le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{GB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \overrightarrow{0}$$

Propriété

Le barycentre du système (A, α), (B, β) et (C, γ) est le même que celui du système (A, $k\alpha$), (B, $k\beta$) et (C, $k\gamma$) où k est un réel non nul.

Propriété

Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A} ; y_\mathrm{A} ; z_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B} ; y_\mathrm{B} ; z_\mathrm{B})$ et $\mathrm{C}(x_\mathrm{C} ; y_\mathrm{C} ; z_\mathrm{C})$. Soit G le barycentre du système (A, α), (B, β) et (C, γ).
Les coordonnées de G sont :

$$\left(\frac{\alpha x_\mathrm{A} + \beta x_\mathrm{B} + \gamma x_\mathrm{C}}{\alpha + \beta + \gamma} ; \frac{\alpha y_\mathrm{A} + \beta y_\mathrm{B} + \gamma y_\mathrm{C}}{\alpha + \beta + \gamma} ; \frac{\alpha z_\mathrm{A} + \beta z_\mathrm{B} + \gamma z_\mathrm{C}}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$$

Exercice n°1 Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

Soit M un point quelconque de l'espace. Démontrer l'égalité $\alpha\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{MC}} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.

Exercice n°2 Soient A(1 ; −2 ; 5), B(2 ; 2 ; −3) et C(0 ; 0 ; 2).

Déterminer les coordonnées de G, barycentre des points pondérés (A, 1), (B, −3) et (C, 4).

Associativité du barycentre

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux des trois points par le barycentre de ces deux points affecté de la somme des coefficients de ces deux points.

Exemple

On note G le barycentre des points (A, 2), (B, 1) et (C, 4). On note I le barycentre des points (A, 2) et (B, 1) et J le barycentre des points (A, 2) et (C, 4).

D'après la propriété d'associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (I, 3) et (C, 4) ou encore, G est le barycentre des points (J, 6) et (B, 1).

Exercice n°3 Soit ABCD un quadrilatère.

Soit H le barycentre du système $\{(A, 2)\,;\,(B, 5)\,;\,(C, -1)\}$ et soit K le barycentre du système $\{(B, 5)\,;\,(C, -1)\,;\,(D, 6)\}$. Enfin, soit E le barycentre du système $\{(C, -1)\,;\,(B, 5)\}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BE} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que H est le barycentre du système $\{(A, 1)\,;\,(E, 2)\}$ puis construire H.
3. Montrer que K est le barycentre du système $\{(D, -3)\,;\,(E, 2)\}$.
4. Montrer que D est le barycentre des points (K, 1) et (E, 2) puis en déduire que les droites (AK) et (DH) sont parallèles.

> Correction des exercices

Exercice n°1

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}&=\alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+\beta(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})+\gamma(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})\\&=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}\end{aligned}$$

Par définition, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Ainsi : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

Exercice n°2

$$\mathrm{G}\left(\frac{1\times1+(-3)\times2+4\times0}{1+(-3)+4}\,;\,\frac{1\times(-2)+(-3)\times2+2\times4}{1+(-3)+4}\,;\,\frac{1\times5+(-3)\times(-3)+4\times2}{1+(-3)+4}\right)$$

Ce qui donne $\mathrm{G}\left(\frac{-5}{2}\,;\,-4\,;\,11\right)$.

Exercice n°3

1. Puisque E est le barycentre du système $\{(B,\,5)\,;\,(C,\,-1)\}$: pour tout point M on a $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{-1+5}(5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})$ soit $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{4}(5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})$.
   En particulier, pour M = B on obtient $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}(5\overrightarrow{BB}-\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

2. D'après la propriété d'associativité du barycentre, H est aussi le barycentre du système $\{(A,\,2)\,;\,(E,\,4)\}$. En multipliant les coefficients par 0,5 on montre que H est le barycentre du système $\{(A,1)\,;\,(E,\,2)\}$.

   Ainsi, pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA})$.

   En particulier, pour M = A on obtient $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AA})$ soit $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

3. D'après la propriété d'associativité du barycentre, K est le barycentre du système $\{(D,\,-6)\,;\,(E,\,4)\}$. En multipliant les coefficients par $-0,5$ on montre que K est le barycentre du système $\{(D,\,-3)\,;\,(E,\,2)\}$.

4. Puisque K est le barycentre du système $\{(D,\,-3)\,;\,(E,\,2)\}$ on a pour tout point M : $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{-3+2}(-3\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME})$.
   Cela revient à écrire que $3\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{ME}$. Ce qui signifie que D est le barycentre du système $\{(K,\,1)\,;\,(E,\,2)\}$.

   Puisque H est le barycentre du système $\{(A,\,1)\,;\,(E,\,2)\}$ on a également pour tout point M : $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{ME})$ ce qui est équivalent à $3\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{ME}$.

   On a ainsi $2\overrightarrow{ME}=3\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MA}$ et $2\overrightarrow{ME}=3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MK}$.
   On obtient donc $3\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MK}$. En posant M = D on obtient :

$$\begin{aligned}
& 3\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DD} - \overrightarrow{DK} \\
\Leftrightarrow\quad & 3\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DK} \\
\Leftrightarrow\quad & 3\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DK} \\
\Leftrightarrow\quad & 3\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{(AD + \overrightarrow{DK})} \\
\Leftrightarrow\quad & 3\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AK}
\end{aligned}$$

On montre ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires et donc que les droites (DH) et (AK) sont parallèles.