

Correction : comme de variables aléatoires

> Somme de variables aléatoires

Exercice n°1

$$1. E(X) = 0 \times 0,4 + 0,6 \times 3 = 1,8 \text{ et } V(X) = 0,4(0 - 1,8)^2 + 0,6(3 - 1,8)^2 = 2,16.$$

$$\text{Ainsi, } E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1,8 + 2,5 = 4,3.$$

$$2. E(3Y) = 3E(Y) = 3 \times 2,5 = 7,5.$$

$$3. V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 2,16 + 1,2 = 3,36 \text{ (les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, on peut donc utiliser cette formule)}$$

Exercice n°2

On note X la variable aléatoire associée au gain de la première partie et Y pour la deuxième.

On suppose que X et Y sont indépendantes.

On note enfin $S = X + Y$.

$$P(S = -4) = P(X = 1) \cap P(Y = -5) = P(X = 1) \times P(Y = -5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S = -3) = P(X = 2) \times P(Y = -5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S = 2) = P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(S = 3) = P(X = 1) \times P(Y = 2) + P(X = 2) \times P(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

$$P(S = 4) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

k	-4	-3	2	3	4
$P(S = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

Exercice n°3

$$1. E(X) = -4 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 0,5. \text{ Avec ce dé, on gagne en moyenne } 0,50\text{€}.$$

$$2. V(X) = \frac{1}{4}(-4 - 0,5)^2 + \frac{1}{4}(1 - 0,5)^2 + \frac{1}{4}(2 - 0,5)^2 + \frac{1}{4}(3 - 0,5)^2 = 7,25.$$

$$3. E(Z) = E(2X) = 2E(X) = 1.$$

$$V(Z) = V(2X) = 2^2 V(X) = 29.$$

$$4. E(Y) = E(X + 3) = E(X) + 3 = 3,5.$$

$$V(Y) = 0,25(-1 - 3,5)^2 + 0,25(4 - 3,5)^2 + 0,25(5 - 3,5)^2 + 0,25(6 - 3,5)^2 = 7,25$$

$$\text{Puis } \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{7,25} \approx 2,69.$$

Exercice n°4

$$1. Y = 200X - 280.$$

2. Le vendeur est en déficit en fin de journée si $Y < 0$, autrement dit si $200X - 280 < 0$ donc si $X < 1,4$. Cet évènement est réalisé quand $X = 0$ ou $X = 1$.

$P(Y < 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2$. La probabilité que le vendeur soit en déficit en fin de journée est de 0,2 soit 20%.

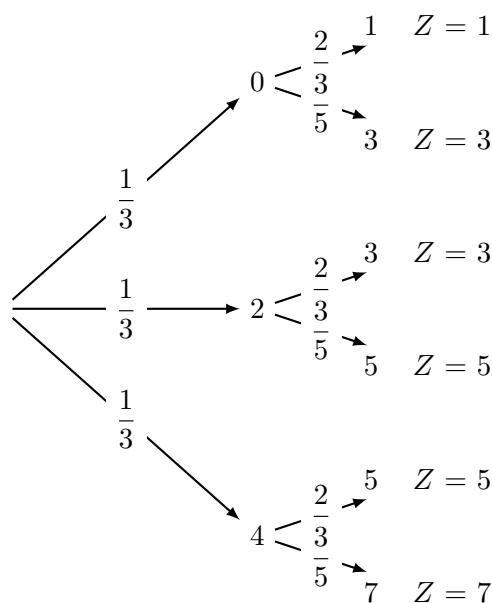
$$3. E(Y) = E(200X - 280) = 200E(X) - 280.$$

D'après le tableau, $E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,15 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,2 + 5 \times 0,2 = 2,95$.

Donc $E(Y) = 200 \times 2,95 - 280 = 310$. Le vendeur peut espérer gagner en moyenne 310€ par jour.

Exercice n°5

On peut construire l'arbre suivant :



On a alors :

$$P(Z = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(Z = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$

$$P(Z = 5) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$

$$P(Z = 7) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

z_i	1	3	5	7
$P(Z = z_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

> Echantillon et somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice n°6

1. On a le tableau suivant :

x_i	99	49	9	-1
$P(X = x_i)$	0,002	0,01	0,02	0,968

$$E(X) = 0,002 \times 99 + 0,01 \times 49 + 0,02 \times 9 + 0,968 \times (-1) = -0,1.$$

$$V(X) = 0,002(99 - (-0,1))^2 + 0,01(49 - (-0,1))^2 + 0,02(9 - (-0,1))^2 + 0,968(-1 - (-0,1))^2 = 46,19.$$

2. $E(S) = 3 \times E(X) = -0,3$. Avec ses trois tickets, il perdra en moyenne 30 centimes.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{46,19} \approx 6,8. \text{ Donc } \sigma(S) = \sqrt{3}\sigma(X) = \sqrt{3} \times \sqrt{46,19} \approx 11,8$$

Exercice n°7

Soit X_i la variable aléatoire associée à la somme payée par le client i .

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

L'espérance de recette sur un client est de $2 \times 0,05 + 5 \times 0,35 + 7 \times 0,2 + 8 \times 0,2 + 10 \times 0,05 = 5,35$.

$$\text{Donc } E(X) = 10 \times 5,35 = 53,5.$$

Le musée peut espérer une recette de 53,50€ sur 10 visiteurs.

Pour la variance :

A l'aide du tableau, on trouve une variance par client de 7,9275

$$\text{Puis } V(X) = 10 \times 7,9275 = 79,275.$$

Exercice n°8

On a le tableau suivant :

k	-4	0	1	3	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{1}{5} \times (-4) + \frac{1}{5} \times 0 + \frac{1}{5} \times 3 + \frac{1}{5} \times 6 = 1,2.$$

$$V(X) = \frac{1}{5} \times (-4 - 1,2)^2 + \frac{1}{5} \times (0 - 1,2)^2 + \frac{1}{5} \times (1 - 1,2)^2 + \frac{1}{5} \times (3 - 1,2)^2 + \frac{1}{5} \times (6 - 1,2)^2 = 10,96.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{10,96} \approx 3,31.$$

On en déduit alors :

$$E(M) = E(X) = 1,2, \quad V(M) = \frac{V(X)}{50} = 0,2192 \text{ et } \sigma(M) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{50}} \approx 0,468$$