

Nombres premiers particuliers

Nombres de Mersenne

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle nombre de Mersenne les entiers de la forme $M_n = 2^n - 1$.

Pour qu'un nombre M_n soit premier, il faut que n soit premier mais cette condition n'est pas suffisante.

Théorème

Soit p un nombre premier impair.

Soit (S_n) la suite définie par $S_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ ppar $S_{n+1} = S_n^2 - 2$.

M_p est premier si et seulement si M_p divise S_{p-2} .

Exercice n°1

1. Déterminer les 5 premiers nombres de Mersenne.
2. Montrer que si n n'est pas un nombre premier alors M_n non n-plus.
3. Montrer que si n est premier, M_n n'est pas nécessairement un nombre premier.
4. A l'aide du précédent théorème, trouver 2 nombres de Mersenne premiers. On pourra utiliser un programme Python pour les calculs de S_n .

Nombres de Fermat

Soit n un entier naturel.

On appelle nombre de Fermat les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Exercice n°2

1. Calculer les 5 premiers nombres de Fermat.
2. Sont-ils premiers ?
3. Quelle conjecture peut-on faire quant à ces nombres ?

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $M_1 = 2^1 - 1 = 1$

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$

$M_3 = 2^3 - 1 = 7$

$M_4 = 2^4 - 1 = 15$

$M_5 = 2^5 - 1 = 31.$

2. Pour tout x réel et pour tout entier naturel n non nul, on a $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

Si n n'est pas un nombre premier, alors il existe un entier $d > 1$ tel que $n = dq$ avec q entier supérieur ou égal à 2.

$$\text{Ainsi, } M_n = 2^n - 1 = (2^d)^q - 1 = (2^d - 1)((2^d)^{q-1} + (2^d)^{q-2} + \dots + 2^d + 1).$$

On a $1 < 2^d - 1 < M_n$ donc $(2^d - 1)$ est un diviseur de M_n et donc M_n admet un autre diviseur que 1 et lui-même : il n'est pas premier.

3. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$

Or 23 et 89 sont des diviseurs de 2 047.

Bien que 11 soit un nombre premier, M_{11} ne l'est pas.

4. On essaye avec des nombres p premiers.

Commençons avec M_7 .

$M_7 = 2^7 - 1 = 127$

A l'aide d'un programme Python, on trouve $S_7 = 2\,005\,956\,546\,822\,746\,114$. Il est bien divisible par 127 donc M_7 est un nombre premier.

On a vu que M_{11} n'était pas premier. Vérifions si M_{13} l'est.

$M_{13} = 2^{13} - 1 = 8\,191.$

La valeur de S_{13} est immense. Grâce à Python, on trouve $S_{13} = 22313995867897900769603796342295788566208710409165129831038160968311491946220319893407703857721437957260314978754160034503401040789215400628158170099668522698066550221265307171574634992724727060201120758890920172789110609085990337846018634451646739004908975710893057017831784106285989578600398251364366079398506512806386775247318462388007386288293644987819640076171556974003404195908596970825853990347990259288695088334854125701652040860084239663064263605520384355127215307437936591866962296906419378104850899571605034504288737636564836267334726723727575106663971046844142763512854023937849655467693015631287929701909077381005060802853209341459156871829180256316747660704875518660035573112882904493746617877304844878674402542586943400547464667179926000026596616252849884072241228637895801783293732168802374542280341992348946606531635000814995246895089041641203184136132975956905572518723976402989858509003359081748048869560319466898146867908972088453016102089761833396052479183215782590173494080725569259056977955738902892341951393866495222420379013713784627095469233910359313068881745808900306832764925725008680492006161979334986865505218272485914888669136966553469714434.$

Ce nombre est divisible par 8 191 : donc M_{13} est bien un nombre premier. Celui-ci a été découvert au XIII^{ème} siècle !

Exercice n°2

1. $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537.$$

2. Tous ces nombres sont des nombres premiers.

3. On aimerai penser qu'ils sont tous premiers.

En réalité, on ne connaît que ceux calculés à la question précédente.

Pierre de Fermat le pensait (1640) aussi et demanda à Blaise Pascal de prouver ce résultat. Ce n'est que Leonhard Euler qui démontra (1732) que Fermat s'était trompé en donnant une factorisation de $F_5 = 4\,294\,967\,297$ par 641.